

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE HUARD DE LA MARRE

1^{re} THÈSE

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES D'INFILTRATIONS A SURFACE LIBRE
AU MOYEN D'ANALOGIES ÉLECTRIQUES

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS DANS LA MÉTHODE DE JONES
POUR L'ÉTUDE DES AILES EN TRANSSONIQUE

Soutenues, le 11 juin 1956, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. PÉRÈS	}	<i>Président.</i>
		FORTIER		<i>Examineurs.</i>
		MALAVARD		

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE HUARD DE LA MARRE

1^{re} THÈSE

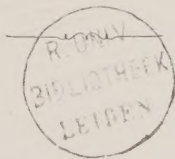
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES D'INFILTRATIONS A SURFACE LIBRE
AU MOYEN D'ANALOGIES ÉLECTRIQUES

2^e THÈSE

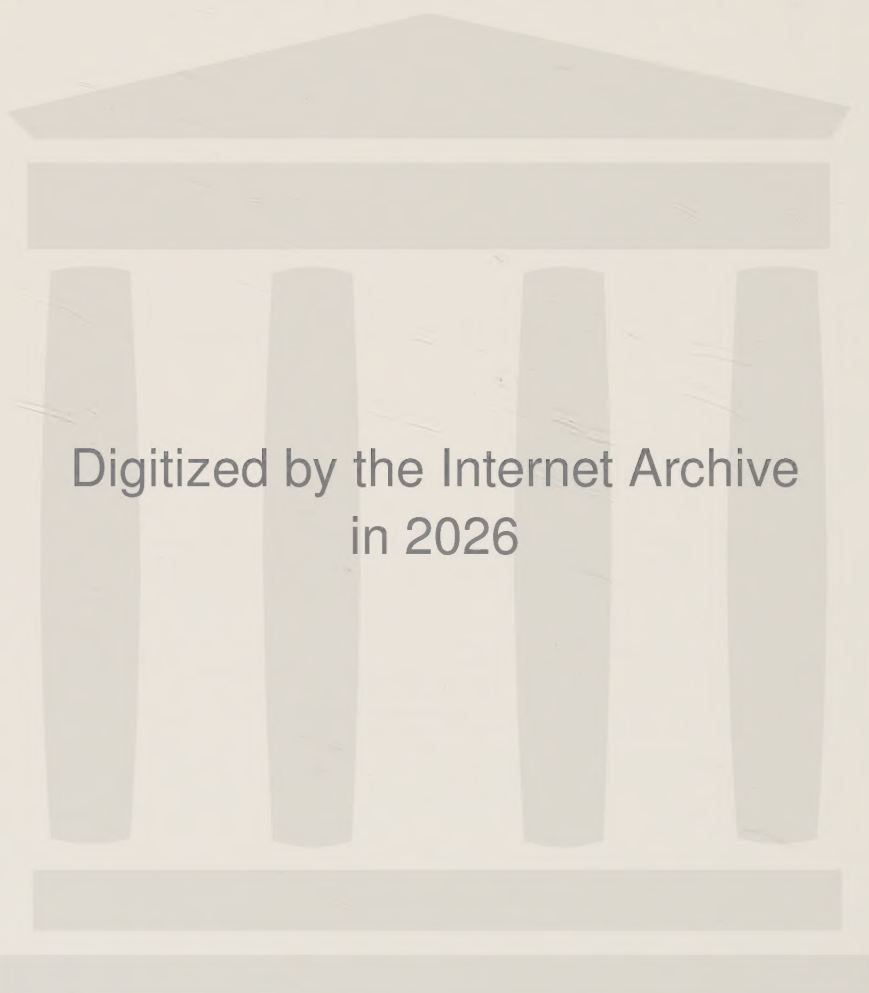
PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS DANS LA MÉTHODE DE JONES
POUR L'ÉTUDE DES AILES EN TRANSSONIQUE

Soutenues, le 11 juin 1956, devant la Commission d'Examen



Jury	{	MM. PÉRÈS	Président.
		FORTIER	Examineurs.
		MALAVARD	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

RÉSOLUTION

DE

PROBLÈMES D'INFILTRATIONS A SURFACE LIBRE

AU MOYEN D'ANALOGIES ÉLECTRIQUES

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	THELLIER	T	Physique du globe.
E. DARMOIS . . .	T	Enseignement de Physique.	AUDUBERT	T	Électrochimie.
FOCH	T	Mécan. phys. et expérimentale.	L'HÉRITIER	T	Génétique.
PAUTHENIER . . .	T	Électrotechnique générale.	GRIVET	T	Radio-électricité.
DE BROGLIE . . .	T	Théories physiques.	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
JOB	T	Chimie générale.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
PRENANT	T	Anatom. et Histol. comparées.	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	QUELET	T	Chimie organique.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et appl.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	CUVILLIER	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	JUNG	T	Pétrographie.
G. DARMOIS . . .	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
Jacques BOURCART .	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	WIEMANN	T	Chimie organ. structurale.
PLANTEFOL	T	Botanique.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et Phys. céleste.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	VASSY		Physique de l'atmosphère.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	DESTOUCHES . . .		Théories physiques.
BOULLIGAND . . .	T	Application de l'analyse à la géométrie.	M. PRUVOST	T	Géologie.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	AMIEL	T	Chimie (P.C.B.).
WYART	T	Minéralogie.	HOCART	T	Minéralogie.
TEISSIER	T	Zoologie.	J.-P. MATHIEU . . .	T	Physique (P.C.B.).
MANGENOT	T	Biologie végétale.	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
P. AUGER	T	Physique quantique et Relat.	MAY		Biologie animale (P.C.B.).
MONNIER	T	Physiologie des fonctions.	CHOQUET	T	Calcul diff. et intégral.
PIVETEAU	T	Géologie.	FELDMANN		Biologie (P.C.B.).
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	GUINIER	T	Physique (P.C.B.).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	JOST	T	Biologie (P.C.B.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.	FORTET	T	Calcul des probabilités.
FAVARD	T	Mécanique générale.	SCHWARTZ	T	Méthode math. de la Physique.
COULOMB	T	Physique du globe.	CHOUARD	T	Physiologie Végétale.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).	MALAVARD	T	Aviation.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	BRELOT	T	Calcul différentiel.
P. DRACH	T	Zoologie.	NORMANT	T	Chimie (P.C.B.).
KASTLER	T	Physique.	BÉNARD	T	Chimie (P.C.B.).
EPHRUSSI	T	Génétique.	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.	DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.).	GELOSO		Chimie (S.P.C.N.).
GAUTHERET	T	Biologie Végétale (P.C.B.).	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
LUCAS	T	Recherches physiques.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
A. THOMAS	T	Biologie Cellulaire.	MARÉCHAL	T	Optique théor. et appliquée.
ARNULF	T	Optique appliquée.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
Max MORAND . . .	T	Physique.	CHADEFAUD		Botanique.
SOLEILLET	T	Physique.	DESTRIAU		Physique (M.P.C.).
FORTIER	T	Mécanique expér. des fluides.	M ^{lle} LE BRETON . . .		Physiologie générale.
DANJON	T	Astronomie.	SALEM		Mathématiques générales.
FROMAGEOT	T	Chimie biologique.	LELONG	T	Mathématiques générales.
LAPORTE	T	Phys. génér. et Radioactivité.	DEVILLERS		Anat. et Histol. comparées.
JANET	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.	EHRESMANN		Topologie algébrique.
PETIT	T	Biologie maritime.	FRANÇON		Physique (M.P.C.).
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	GLANGEAUD		Géographie physique et Géologie dynamique.
GALLIEN	T	Embryologie.	GODEMENT		Mathématiques (M.P.C.).
EICHHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.).	PISOT		Calcul des probabilités.
DE CUGNAC		Biologie végétale (P.C.B.).	E. ROCH		Géologie.
M ^{lle} CAUCHOIS . . .	T	Chimie-physique.	SCHATZMANN		Astrophysique.
			TERMIER		Paléontologie stratigraphique.
			ZAMANSKY		Mathématiques générales.

Secrétaire général Ch. MONIER

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Calcul Analogique de l'Institut Blaise Pascal (Centre National de la Recherche Scientifique).

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. le Professeur PÉRÈS, Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences de Paris, et à M. le Professeur MALAVARD, pour les conseils précieux qu'ils ont bien voulu me prodiguer au cours de la préparation de cette thèse.

SOMMAIRE

On sait quelle place importante prennent les écoulements de filtration dans un grand nombre de techniques (construction de digues et de barrages en terre, assèchement de fouilles, stabilité des pentes, pétrologie, irrigation, drainage, etc.). L'étude mathématique de tels écoulements repose sur des hypothèses simples : ce sont essentiellement les lois bien connues de DARCY, que nous rappelons dans les chapitres qui suivent, et qui sont vérifiées par l'expérience dans de larges limites de vitesses. Dans ces conditions, l'écoulement dérive d'un potentiel harmonique pour le cas le plus simple (cas d'un milieu perméable isotrope). Étant donné la diversité de forme des domaines étudiés, et le fait que les surfaces libres des écoulements sont inconnues *a priori*, les possibilités des méthodes analytiques sont malheureusement assez limitées : seuls, quelques cas très particuliers, où les domaines ont des formes géométriques simples, peuvent être ainsi résolus. Encore faut-il faire appel à des méthodes assez longues (transformations conformes, par exemple) nécessitant généralement l'emploi de fonctions tabulées. Enfin, dans le cas d'écoulements en milieu hétérogène et anisotrope, le potentiel de l'écoulement est solution d'une équation aux dérivées partielles d'un type plus général que l'équation de LAPLACE : on n'a même plus, dans ce cas, la ressource des transformations conformes.

On comprend donc l'intérêt qu'il peut y avoir à rechercher des méthodes simples et rapides, d'une précision suffisante pour les besoins pratiques, et permettant de résoudre les problèmes mathématiques posés par les écoulements de filtration : c'est l'objet de cet ouvrage, où je me suis limité à des méthodes basées sur les analogies électriques. Ces dernières sont couramment utilisées pour l'étude de problèmes divers dépendant de l'équation de LAPLACE, ou d'équations d'un type voisin (aérodynamique, élasticité, thermodynamique, etc.). Si leur principe est simple, leur technique nécessite cependant la réalisation d'un modèle analogique électrique et l'imposition, sur ce modèle, des conditions aux limites analogues. Les analogies électriques doivent donc être adaptées à la nature des conditions aux limites particulières à chaque catégorie de problème étudié. En ce qui concerne les infiltrations, une condition aux limites caractéristique est la surface libre : cette frontière est inconnue *a priori* et doit être déterminée par itérations. Comme on le verra dans les chapitres qui suivent, la nécessité pratique de déterminer rapidement la surface libre est un des problèmes essentiels de l'adaptation des analogies électriques à l'étude de ces écoulements. On verra également que la précision de cette technique est amplement suffisante pour les besoins pratiques, et nettement supérieure à celle obtenue à l'aide de modèles en sable. Ces derniers sont, en outre, d'une mise en œuvre délicate et onéreuse, et ne permettent pas de réaliser pratiquement des milieux hétérogènes et anisotropes.

Les différentes méthodes d'analogies électriques proposées dans cet ouvrage ont été choisies pour résoudre une classe étendue de problèmes d'infiltration. Ces problèmes

ont été divisés en quatre catégories, faisant chacune l'objet d'un chapitre, et classées par ordre de complexité croissante :

— les *problèmes plans d'écoulements permanents en milieu homogène et isotrope* (chap. premier), résolus aisément par l'utilisation de modèles en papier conducteur;

— les *problèmes plans d'écoulements permanents en milieu hétérogène et anisotrope*, résolus par l'emploi de réseaux de conductances (chap. II). Cette méthode, aux possibilités très étendues, ne semble avoir fait l'objet, jusqu'à présent, que d'applications peu nombreuses, portant sur des domaines de formes très simples. C'est pourquoi j'expose les bases théoriques de cette analogie, et son adaptation pratique à l'imposition de conditions aux limites sur des frontières courbes, indépendamment des problèmes d'infiltration (deuxième partie du chap. II). Les méthodes proposées dans ce passage sont donc d'une application générale. J'ai groupé ensuite (troisième partie du chap. II) les procédés d'adaptation du réseau aux différents problèmes d'infiltration, avec renvois, quand il y a lieu, à la deuxième partie de ce chapitre;

— les *problèmes tridimensionnels d'écoulements permanents* (chap. III). Pour les milieux homogènes et isotropes, le papier conducteur doit être remplacé par un matériau solide et facile à travailler. La méthode proposée est basée sur l'emploi de modèles en plâtre conducteur. En ce qui concerne les écoulements en milieux hétérogènes et anisotropes, leurs solutions s'obtiennent à l'aide de réseaux tridimensionnels;

— les *écoulements non permanents* (chap. IV). Ces problèmes se ramènent, par une méthode de proche en proche, à une série d'écoulements permanents, où la surface libre n'est plus ligne de courant.

Au cours de la recherche des différents procédés de calcul analogique exposés ci-dessus, j'ai été conduit à quelques remarques théoriques des propriétés des écoulements de filtration. Le résultat de l'une d'entre elles, bien que ne répondant pas au titre de cet ouvrage, m'a semblé d'un certain intérêt pratique : il s'agit des expressions exactes des débits dans une classe de massifs filtrants tridimensionnels barrant une vallée imperméable. La démonstration est donnée en appendice à la fin du chapitre III.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

LES PROBLÈMES PLANS EN MILIEU HOMOGÈNE ET ISOTROPE LEUR SOLUTION PAR LA TECHNIQUE DU PAPIER CONDUCTEUR

	PAGES
I. — Introduction	1
A. — Rappel des lois de la filtration	1
1. Équation de l'écoulement	2
2. — Conditions aux limites	2
a) Frontière baignée extérieurement par un réservoir contenant un liquide pratiquement en équilibre hydrostatique	3
b) Surface de suintement	3
c) Frontière imperméable	3
d) Surface libre	3
B. Analogies rhéoelectriques	4
C. Choix du matériau conducteur	5
II. Technique du papier conducteur.....	6
A. Les modèles analogiques	6
1. Caractéristiques du papier conducteur Teledeltos ..	6
2. Préparation des modèles	7
3. — Alimentation des modèles — Mesures électriques	9
B. Analogie « directe »	9
1. Détermination de la surface libre	9
2. Tracé des équipotentiels	10
3. — Mesure des débits	10
C. Analogie « inverse »	11
D. Précision de la méthode	13

III. — Étude de quelques problèmes d'infiltrations	13
A. — Position de la surface libre et débit dans une digue, en fonction des niveaux des bassins amont et aval	13
1. — Cas d'une digue à parois verticales	13
2. — Digues à parois inclinées symétriques	14
B. — Influence de drains à l'amont d'un noyau imperméable	15
C. — Influence de fuites dans des rideaux d'étanchéité	15
D. — Limitation amont ou aval des modèles	17

CHAPITRE II

LES PROBLÈMES PLANS EN MILIEUX HÉTÉROGÈNES ET ANISOTROPES LEUR SOLUTION PAR LA TECHNIQUE DES RÉSEAUX

I. — Infiltrations en milieu quelconque	18
A. — Équation de base	18
B. — Principaux cas pratiques	19
C. — Conditions aux limites	19
1. — Frontière imperméable	19
2. — Surface libre	19
3. — Passage d'une zone à l'autre	21
D. — Problèmes pratiques posés par l'anisotropie et l'hétérogénéité	22
1. — Massifs zonés	22
2. — Massifs anisotropes homogènes	22
II. — Théorie des réseaux de conductances	23
A. — Emploi des différences finies	24
1. — Interpolation entre trois points alignés	24
2. — Équations aux dérivées partielles	25
3. — Analogie électrique des réseaux de conductances	27
a) Caractéristiques d'une croix	27
b) Caractéristiques d'un réseau	27
4. — Intérêt des mailles rectangulaires inégales	30

B. — Conditions aux limites	31
1. — Condition de DIRICHLET	31
a) Méthode des moyennes	31
b) Autre méthode	32
c) Comparaison des deux méthodes	33
d) Comparaison expérimentale	31
2. — Condition de NEUMANN	31
a) On tient compte des dérivées secondes	35
b) On néglige les dérivées secondes	37
α) Méthode des diagonales	38
β) Méthode des conductances de bordure	40
γ) Cas où la frontière ne passe que par des nœuds	42
3. — Condition de FOURIER	44
C. — Représentation de singularités	45
1. — Extrémité d'une coupure	45
2. — Angle saillant d'une frontière imperméable	49
III. — Application de la méthode des réseaux aux écoulements de filtration	50
A. — Caractéristiques d'un écoulement de filtration et leurs représentations analogiques	50
1. — Anisotropie et hétérogénéité du milieu perméable	51
2. — Parement baigné par un réservoir — Drains et puits pleins d'eau	51
3. — Surface de suintement	51
4. — Surface imperméable	51
5. — Extrémités de palplanches, de drains, points anguleux	51
6. — Massifs zonés : passage d'une zone à l'autre	51
a) Cas où les directions des perméabilités principales sont les mêmes dans les deux zones	51
b) Cas où elles sont différentes	53
7. — Surface libre	53
a) Méthode en escalier	54
α) Lissage	54
β) Passage des grandes mailles aux petites mailles	54
b) Emploi de conductances de bordure	56
c) Méthode par injections	57
B. — Technique des réseaux électriques	57
1. — Le réseau	57
2. — Alimentation du réseau	59
a) Montage sans injections	59
b) Montage avec injections	61

CHAPITRE III

MODÈLES ANALOGIQUES A TROIS DIMENSIONS

	PAGES
I. Position du problème	63
II. — Réalisation des modèles analogiques	64
A. — Utilisation du plâtre	64
1. Propriétés électriques du plâtre	64
2. — Confection et utilisation des modèles analogiques	66
3. — Essais à deux dimensions	68
4. — Essais à trois dimensions	70
5. — Conclusions	71
B. — Utilisation des réseaux tridimensionnels.....	72
1. — Imposition des conditions aux limites	74
a) Frontières où le potentiel est connu.....	74
b) Frontières lignes de courant	74
α) Cas d'une frontière imperméable connue.....	74
β) Cas de la surface libre	76
2. — Montage expérimental	78
3. — Essai de la méthode	78
4. — Intérêt des réseaux	79
C. — Utilisation de la cuve.....	79
1. — Cas d'un modèle de forme quelconque	79
2. — Cas d'un modèle à paroi plane	81

APPENDICE

Expressions exactes des débits d'infiltration dans des barrages tridimensionnels
à parois verticales

I. — Formules de DUPUIT	82
II. — Extension à des cas plus généraux	83
III. — Quelques exemples d'application	85

CHAPITRE IV

ÉCOULEMENTS NON PERMANENTS

	PAGES
I. — Introduction	89
A. — Nouvelle classe de problèmes	89
B. — Conditions aux limites	89
1. — Parement AH en contact avec l'eau du bassin	90
2. — Frontière imperméable AA'	90
3. — Surface de suintement	90
4. — Surface libre	91
II. — Détermination du mouvement de la surface libre	91
A. — Équation du mouvement	91
B. — Résolution par différences finies	92
1. — Différences finies dans le temps	93
2. — Corrections graphiques	93
C. — Généralité de la méthode par différences finies	95
III. — Modes opératoires	96
A. — Méthode du papier conducteur	96
B. — Méthode des réseaux	97
1. — Détermination de la surface libre à une fraction de maille près	98
2. — Imposition des potentiels sans réglages	98
3. — Utilisation d'un tableau de coefficients pour le calcul de ϕ'_z	98
4. — Calculateur analogique	99
IV. — Résultats expérimentaux	101
1. — Drainage d'un massif rectangulaire	101
2. — Vidange lente de la retenue d'un barrage zoné	101
3. — Vidange instantanée de la retenue d'un barrage	101
4. — Abaissement d'une nappe phréatique par pompage dans un puits	102
V. — Conclusions	103
PLANCHES I₁ A IV₈	105
BIBLIOGRAPHIE	153

CHAPITRE PREMIER

LES PROBLÈMES PLANS EN MILIEU HOMOGENE ET ISOTROPE LEUR SOLUTION PAR LA TECHNIQUE DU PAPIER CONDUCTEUR

I. — Introduction

A. — RAPPEL DES LOIS DE LA FILTRATION

La théorie mathématique des écoulements de liquides dans les milieux poreux a fait l'objet de nombreux exposés (réf. [1], [2], [3], [4]). Je me contenterai d'en rappeler ici les principaux résultats.

On sait qu'un écoulement plan dans un milieu perméable isotrope et homogène obéit en tout point, sous réserve de vitesses suffisamment lentes, à la loi de DARCY :

$$V = - \frac{k}{\mu} \text{grad} (p + \varpi z),$$

que l'on écrit sous la forme plus simple :

$$(1) \quad V = - K \text{ grad } \varphi.$$

Dans ces équations, nous avons :

V = vitesse de l'écoulement au point considéré ⁽¹⁾;

k = perméabilité du milieu poreux;

μ = viscosité du liquide en mouvement;

ϖ = poids spécifique du liquide;

p = pression du liquide au point considéré;

z = cote du point considéré;

$$K = \frac{k}{\mu} \varpi = \text{Cte};$$

$$\varphi = \frac{p}{\varpi} + z.$$

(1) Rappelons que cette vitesse n'est pas la vitesse vraie de déplacement d'une particule de liquide, mais la vitesse vraie multipliée par ε , porosité du milieu perméable.

1. — Équation de l'écoulement.

Le liquide étudié est supposé incompressible, et le milieu traversé indéformable. Ces hypothèses nous permettent d'écrire l'équation de continuité :

$$(2) \quad \operatorname{div} V = 0$$

ou :

$$(3) \quad \operatorname{div} (K \operatorname{grad} \varphi) = 0.$$

L'équation (3) nous donne :

$$(4) \quad \Delta^2 \varphi(x, z) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

C'est une équation du type de LAPLACE. Le potentiel de l'écoulement est donc harmonique et est entièrement déterminé à l'intérieur d'un domaine si l'on connaît les conditions aux limites, c'est-à-dire, pour ce qui concerne la suite de cet exposé, si l'on connaît, le long de la frontière de ce domaine, soit la valeur de φ (condition de DIRICHLET), soit la valeur de sa dérivée $d\varphi/dn$, prise normalement à la frontière (condition de NEUMANN).

En appelant ψ la fonction conjuguée de φ , les lignes de courant sont représentées par :

$$(5) \quad \psi(x, z) = \text{Cte.}$$

Elles sont normales aux lignes équipotentiellles définies par :

$$(6) \quad \varphi(x, z) = \text{Cte.}$$

En tout point non singulier du champ, on a :

$$(7) \quad \partial \varphi / \partial \chi = - \partial \psi / \partial \eta,$$

χ et η étant deux directions orthogonales quelconques.

La connaissance des deux familles de courbes $\varphi = \text{Cte}$ et $\psi = \text{Cte}$ permet la résolution complète du problème, car on peut en déduire les répartitions des pressions, des vitesses et des débits.

2. — Conditions aux limites.

Examinons les diverses conditions aux limites physiques pouvant être imposées à un écoulement de filtration à surface libre, et quelles sont leurs représentations mathématiques pour la fonction potentielle φ . Pour fixer les idées, prenons l'exemple d'un écoulement dans un barrage en terre (fig. 1, 2 et 3).

a) FRONTIÈRE BAIGNÉE EXTÉRIEUREMENT PAR UN RÉSERVOIR CONTENANT UN LIQUIDE PRATIQUEMENT EN ÉQUILIBRE HYDROSTATIQUE.

C'est le cas des parements amont $A_1 B_1$ et aval $A_2 B_2$, le long desquels le potentiel est constant (condition de DIRICHLET).

b) SURFACE DE SUINTEMENT.

Entre le point de résurgence S de la surface libre sur le parement aval, et la surface du bassin aval, il existe, en général, une « surface de suintement » (réf. [2], p. 287).

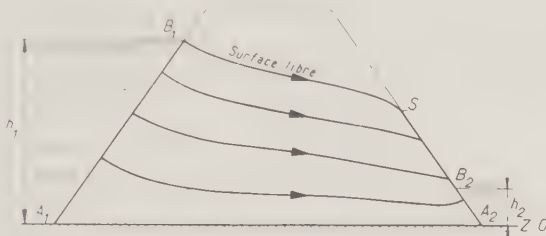


Fig. 1

C'est le cas du segment SB_2 de la figure 1. Ce segment, qui est traversé par un flux, est en contact avec la pression atmosphérique, que nous prendrons comme origine des pressions. Le potentiel le long d'une surface de suintement est donc égal à la cote z du point considéré (condition de DIRICHLET).

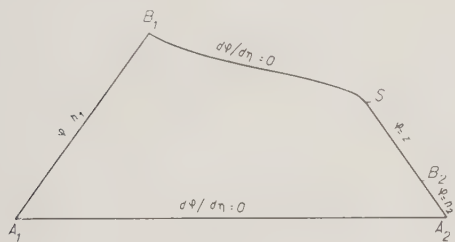


Fig. 2

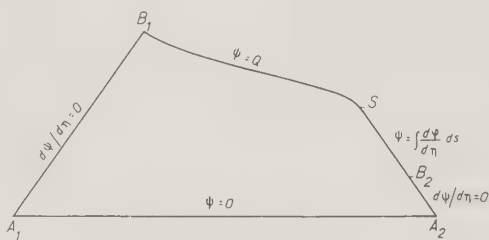


Fig. 3

c) FRONTIÈRE IMPERMÉABLE.

C'est le cas du segment $A_1 A_2$. Aucun flux ne le traversant, $A_1 A_2$ est une ligne de courant. Nous avons donc $d\varphi/dn = 0$ (condition de NEUMANN).

d) SURFACE LIBRE.

Il s'agit d'une ligne de courant. Par suite, le long de la surface libre $B_1 S$, nous avons la condition de NEUMANN :

$$d\varphi/dn = 0.$$

D'autre part, le long de cette surface, la pression est égale à la pression atmosphérique (en négligeant la capillarité) et, par suite, $\varphi = z$. Nous avons donc une

condition supplémentaire qui compense le fait que nous ne connaissons pas *a priori* la position de la surface libre : la détermination de cette position est le premier problème à résoudre dans l'étude d'un écoulement de filtration. Nous verrons plus loin comment ce problème peut être résolu par une méthode itérative.

B. — ANALOGIES RHÉOÉLECTRIQUES

On sait qu'une équation de LAPLACE est susceptible d'être résolue expérimentalement par la méthode d'analogie rhéoélectrique. Cette méthode est bien connue (réf. [5]) et je me contente d'en rappeler brièvement le principe. Un corps conducteur parcouru par un écoulement électrique est soumis à une certaine répartition de la tension électrique $E(x, y, z)$. En appelant $j(x, y, z)$ le vecteur courant électrique et $\rho(x, y, z)$ la résistivité du conducteur au point considéré, on a les relations :

$$(8) \quad \vec{j} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } E;$$

$$(9) \quad \text{div } \vec{j} = 0.$$

La tension E vérifie donc l'équation aux dérivées partielles :

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E}{\partial z} \right) = 0.$$

Dans le cas d'un conducteur plan et homogène, l'écoulement est à deux dimensions (coordonnées x et z) et ρ est une constante. (10) devient une équation de LAPLACE :

$$(10') \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0.$$

La comparaison des équations (1) et (8), d'une part, et (4) et (10'), d'autre part, fait apparaître une correspondance analogique particulièrement immédiate :

$$(11) \quad \begin{aligned} j &\rightarrow V, \\ 1/\rho &\rightarrow K, \\ E &\rightarrow \varphi. \end{aligned}$$

Il suffit donc de construire un modèle électrique de dimensions géométriques semblables à celles du domaine considéré de l'écoulement de filtration, et d'y imposer des conditions aux limites électriques correspondantes pour résoudre le problème hydraulique. Les grandeurs électriques mesurées sur le modèle analogique fournissent une solution expérimentale.

Le passage des grandeurs électriques aux grandeurs hydrauliques se fait en écrivant les égalités de rapports « analogues » sans dimensions exprimés à l'aide des grandeurs

électriques, d'une part, et des grandeurs hydrauliques, d'autre part. Nous avons, par exemple :

$$(12) \quad \frac{E}{U} = \frac{\varphi}{H},$$

où H est la charge hydraulique de l'écoulement et U la tension électrique correspondante. De même :

$$(13) \quad \frac{\rho I}{U} = \frac{Q}{KH},$$

où I est le flux électrique (ou intensité) traversant une surface donnée et Q le débit hydraulique correspondant (problème à deux dimensions). On voit que la détermination du débit traversant une digue, par exemple, revient à mesurer l'intensité électrique traversant le modèle analogique.

L'analogie entre E et φ , désignée habituellement sous le nom d'analogie « directe », n'est pas la seule possible. On utilise également celle existant entre E et ψ , ou analogie « inverse », qui nous donne, sous forme d'équipotentiels électriques, les lignes de courant de l'écoulement. On peut remarquer que dans cette analogie, qui est possible puisque ψ est harmonique, les conditions aux limites du type « équipotentielle » et « ligne de courant » sont inversées par rapport à celles de l'analogie « directe », en vertu de la relation (7). D'où les noms de ces deux analogies.

C. — CHOIX DU MATÉRIAU CONDUCTEUR

L'étude des problèmes bidimensionnels conduit à réaliser des modèles analogiques à l'aide d'un conducteur plan. Ce dernier peut être liquide : c'est, dans ce cas, un électrolyte contenu dans une cuve rhéoelectrique de faible profondeur (réf. [5]). Mais la cuve est peu utilisée quand il s'agit d'écoulements comportant une surface libre, pour la raison suivante : la surface libre est une frontière ligne de courant, de forme quelconque, que l'on doit matérialiser par une paroi isolante de même forme (en paraffine, par exemple). Comme on ne connaît pas sa position exacte *a priori*, on est amené à réaliser un certain nombre d'approximations successives de cette surface, avec toutes les opérations intermédiaires nécessaires (vidange de la cuve, nettoyage, étanchéité, remplissage, etc.).

Un procédé intéressant, dû à Mladen M. BORELI (réf. [6]), consiste à matérialiser la surface libre par une bande de caoutchouc mousse, collée à l'aide de vaseline, et que l'on peut déplacer durant les diverses itérations, sans nuire à l'étanchéité.

Il est toutefois plus rapide de découper le modèle analogique dans un conducteur solide, plan et mince dont on rectifiera la forme par essais successifs. En 1935, R. D. WYCKOFF et D. W. REED préparèrent un papier spécial conducteur, en enduisant du bristol avec de l'aquadag, et l'utilisèrent pour des problèmes d'infiltration à surface libre (réf. [7]). La fabrication de ce papier semble néanmoins assez longue (enduit de douze à vingt couches d'aquadag, à l'aide d'un vaporisateur).

Vers 1949, fut utilisé à l'Institut Blaise Pascal, pour l'étude de divers champs harmoniques, un papier conducteur vendu dans le commerce sous le nom de papier

« Teledeltos » (réf. [8]). Ce papier, fabriqué pour un tout autre usage (enregistrement graphique), présente sensiblement les qualités requises pour la confection de modèles analogiques. Son homogénéité et son isotropie, en ce qui concerne les caractéristiques électriques, sont suffisantes pour obtenir des résultats à quelques pour cent près. Cette précision fait du papier Teledeltos un matériau conducteur tout indiqué pour l'étude des problèmes d'infiltration, qui ont été abordés pour la première fois au laboratoire par E. D'OLIVEIRA E SOUSA (réf. [9]) et par moi-même (réf. [10]).

Notons, pour terminer, qu'en 1952, P. F. FILTCHAKOF a utilisé des papiers conducteurs de différentes valeurs de conductivité et fabriqués spécialement par l'Institut Central du Papier d'U.R.S.S. pour étudier des écoulements de filtration dans des massifs zonés (réf. [11]).

II. — Technique du papier conducteur

A. — LES MODÈLES ANALOGIQUES

1. — Caractéristiques du papier conducteur Teledeltos.

Le papier conducteur Teledeltos est constitué de deux feuilles collées avec un composé de graphite. Une face est gris clair, l'autre gris foncé et métallisée. Ce conducteur étant d'une structure hétérogène en épaisseur, il n'est pas possible de définir sa résistivité, mais puisqu'il s'agit de problèmes plans, il suffit de connaître la résistance ρ d'un carré de papier entre deux côtés opposés, la dimension du carré n'intervenant pas dans la valeur de ρ . Le papier habituellement utilisé (qualité L) a une résistance de l'ordre de 2 500 ohms. Cette valeur n'est donnée qu'à titre indicatif, car ρ est influencé par la température et le degré hygrométrique, et peut varier, de ce fait, de quelques centaines d'ohms. Il est donc nécessaire de mesurer ρ lors de chaque expérience, à l'aide d'un échantillon rectangulaire découpé en même temps que le modèle, et le plus près possible de celui-ci (*fig. 4*).

Les variations de température et d'humidité n'agissent pas sur la répartition du potentiel électrique du modèle analogique, car toutes les parties de ce dernier, dont les dimensions sont généralement de l'ordre de quelques décimètres, sont placées dans les mêmes conditions. Par contre, on fausse notablement les résultats en posant par négligence le coude ou l'avant-bras sur une partie du modèle, ou même en éclairant partiellement celui-ci avec une lampe de bureau trop rapprochée.

La résistance présente une anisotropie et une hétérogénéité dues sans doute au fait que le papier est fabriqué en rouleaux : la résistance est plus grande près des bords de la feuille qu'au centre (variation pouvant atteindre près de 10 %), et plus grande suivant l'axe du rouleau que parallèlement aux bords de la feuille (anisotropie de l'ordre de 5 à 6 %). Ces résultats ont été constatés sur des échantillons rectangulaires d'une dizaine de centimètres de long.

Nous verrons plus loin, au paragraphe D, que ces défauts d'homogénéité et d'isotropie ont une faible influence sur la précision des résultats.

2. — Préparation des modèles.

Les modèles analogiques sont découpés suivant la forme géométrique du domaine étudié, à l'aide d'une paire de ciseaux ou d'une lame de rasoir (*fig. 5 et 6*). Les portions

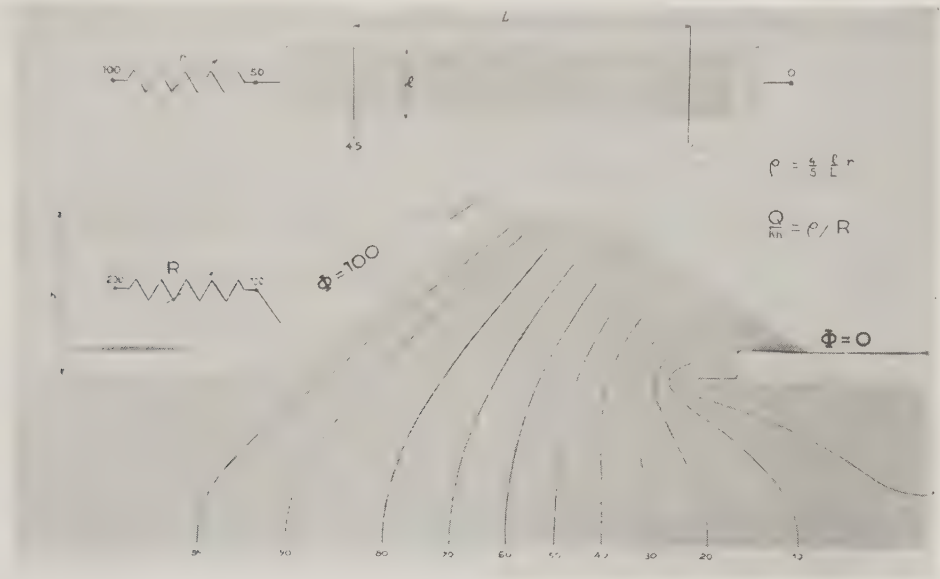


Fig. 4

isolantes (condition de NEUMANN) sont de simples coupures du papier. Les parties de la frontière où l'on doit imposer la valeur du potentiel (condition de DIRICHLET) sont bordées de petites électrodes, séparées entre elles par un intervalle isolant. Chaque

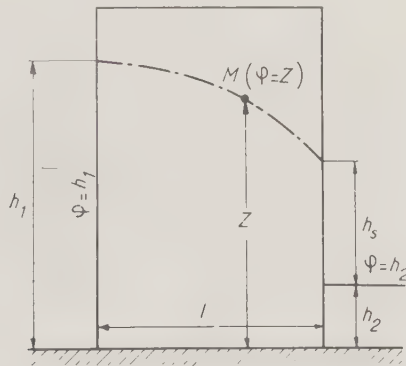


Fig. 5

électrode est reliée au point mobile d'un potentiomètre, qui la porte à un potentiel φ déterminé (valeur de φ au point milieu de l'électrode). L'ensemble de ces petites électrodes réalise la loi donnée du potentiel d'une façon discontinue, mais dont l'effet perturbateur sur le champ électrique est localisé au bord du modèle. Ce procédé permet de déterminer

la répartition du flux traversant la frontière par simple mesure des intensités sortant par chacune des petites électrodes.

On peut réaliser ces électrodes en clinquant de cuivre très mince. On sépare les deux feuilles constituant le papier Teledeltos sur 1 ou 2 cm de profondeur, à l'aide d'une

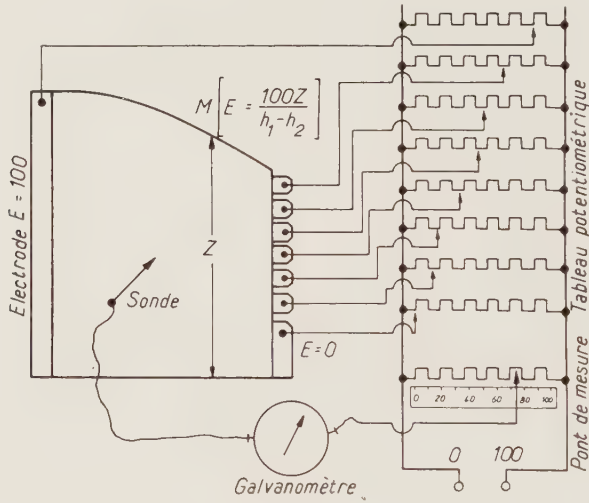


Fig. 6

lane de rasoir, et l'on y glisse l'électrode. Les deux lèvres du papier sont recollées sur le clinquant à l'aide d'une colle spéciale conductrice (colle cellulosique additionnée de graphite, et séchant très rapidement) (fig. 7). On peut également coller directement

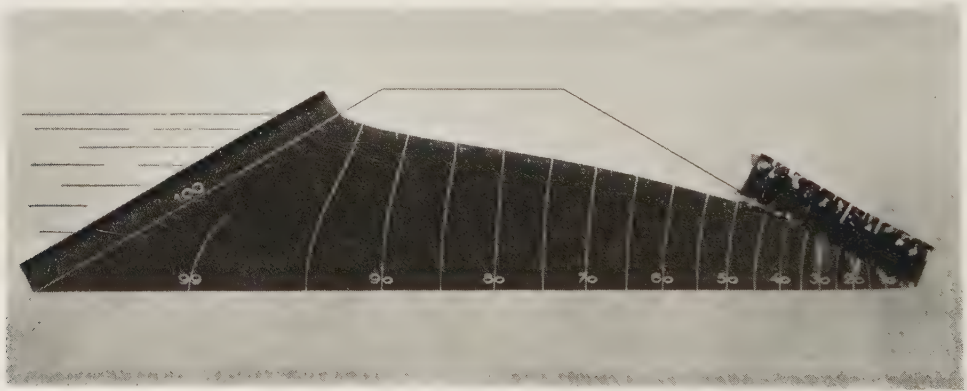


Fig. 7

l'électrode sur l'une ou l'autre face du papier, ce qui évite de l'ouvrir. Mais le collage doit être fait, dans ce cas, avec beaucoup de soin. On peut également peindre directement les électrodes sur le papier à l'aide d'une peinture spéciale à base d'argent (fig. 4). Ce procédé est très rapide.

Le rapport des largeurs des électrodes proprement dites et des intervalles les séparant ne doit pas être quelconque : un rapport trop petit provoquerait une

perturbation importante du champ au voisinage de la frontière, les électrodes jouant alors le rôle de sources ou de puits. Par contre, un rapport trop grand (c'est-à-dire des intervalles isolants trop étroits) ferait échanger des courants trop intenses entre les électrodes voisines. Des expériences systématiques faites à la cuve rhéoelectrique par M. MALAVARD, en 1933 (réf. [12], p. 52), ont montré que le rapport 3 à 1 était un bon compromis.

3. — Alimentation des modèles — Mesures électriques.

L'alimentation des modèles peut se faire soit en alternatif, comme pour la cuve rhéoelectrique (réf. [5]), soit en continu. La tension utilisée varie de quelques volts à plusieurs dizaines de volts, suivant la résistance du modèle.

Des potentiomètres, montés en parallèle entre les bornes du générateur, permettent d'imposer les potentiels voulus aux électrodes du modèle (*fig. 6*). Leurs réglages se font par opposition avec un potentiomètre étalonné de référence, à quatre chiffres, l'indicateur de zéro étant un galvanomètre sensible ou un oscilloscope, suivant l'alimentation. Cette méthode d'opposition est également utilisée pour mesurer le potentiel en un point quelconque du modèle, à l'aide d'une pointe de touche ou « sonde », à l'extrémité légèrement arrondie.

B. — ANALOGIE « DIRECTE »

L'exploitation de l'analogie entre E et φ , dite « directe », comprend tout d'abord la recherche de la surface libre. On peut tracer ensuite le champ des équipotentielles et mesurer les différents débits utiles.

1. — Détermination de la surface libre.

Ne connaissant pas *a priori* la position de la surface libre, il nous faut la déterminer par approximations successives. Lors de la confection du modèle analogique, on prend soin de laisser du papier en excès au-dessus de la surface libre (*fig. 4*). On recherche alors une ligne sur le modèle où, en chaque point, le potentiel est proportionnel à la cote de ce point. On coupe suivant cette ligne (ou plus exactement, par précaution, un peu avant cette ligne). Le champ électrique est alors modifié, et l'on recherche la nouvelle ligne ayant la propriété énoncée plus haut. On recoupe de nouveau, et ainsi de suite. Les itérations successives, au nombre d'une demi-douzaine en général, convergent rapidement : on peut voir, sur la *figure 4*, que malgré une approximation initiale assez grossière de la surface libre (profil de la digue), on se rapproche considérablement de la solution dès la troisième itération. Les dernières itérations étaient trop serrées pour être représentées (la sensibilité de la méthode est de l'ordre du millimètre pour des modèles de quelques décimètres de haut).

On opère pratiquement en traçant sur le modèle des horizontales équidistantes. Sur chacune de ces droites, on recherche le point où le potentiel a la valeur correspondant à la cote de l'horizontale considérée.

2. — Tracé des équipotentielles.

La détermination du champ des équipotentielles est très facile : elle se fait à l'aide de la sonde que l'on porte à un potentiel déterminé. On pose verticalement la pointe sur le papier et on la promène jusqu'à ce que l'intensité qui la traverse soit nulle. Le point de contact du modèle est alors au même potentiel que la sonde. Une légère pression laisse une marque visible sur le papier, et l'on peut tracer ainsi directement sur le modèle une équipotentielle en pointillés (*fig. 8*).

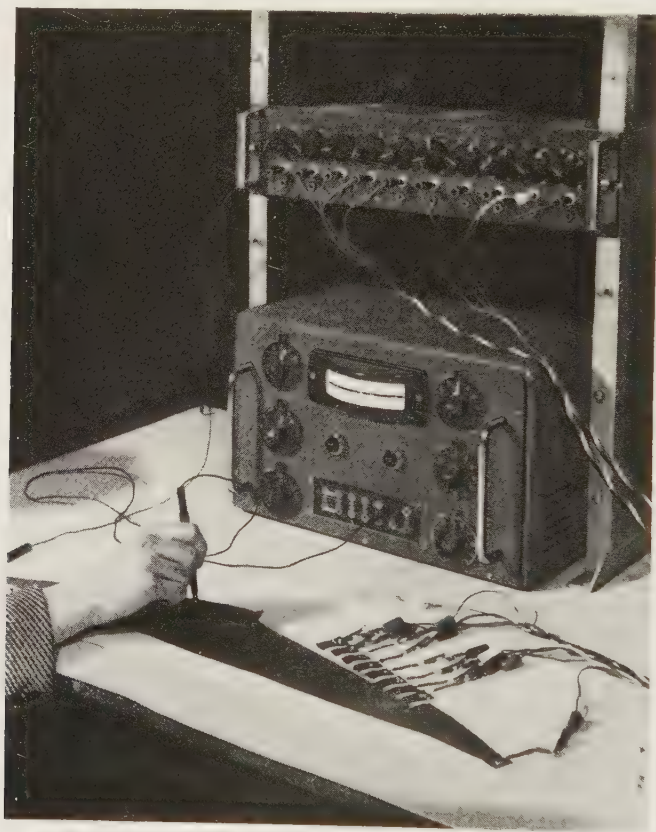


Fig. 8

3. — Mesure des débits.

Il est souvent nécessaire de connaître les intensités électriques entrant ou sortant par les différentes électrodes du modèle, soit, par exemple, pour déterminer le débit d'infiltration à travers une digue (voir *fig. 4*), soit pour déterminer la répartition de la fonction de courant ψ le long d'une surface de suintement, en vue d'effectuer l'analogie « inverse » de l'écoulement (voir plus loin, § C). Pour cela, il est commode d'intercaler entre l'électrode considérée, dont le potentiel était φ , et le point mobile du potentiomètre qui l'alimente, une résistance connue r . On rétablit la valeur φ de l'électrode en

modifiant le potentiomètre, dont le curseur est alors au potentiel φ que l'on mesure. L'intensité cherchée est évidemment :

$$i = \frac{\varphi}{r} \frac{\varphi}{r}.$$

La valeur de i correspond au flux traversant un élément de frontière égal à la largeur de l'électrode, *plus* les deux demi-intervalles isolants qui l'encadrent.

C. - ANALOGIE « INVERSE »

La position de la surface libre étant connue par l'analogie directe, on peut confectionner un second modèle pour réaliser l'analogie « inverse », c'est-à-dire entre la tension électrique E et la fonction de courant ψ . Pour fixer les idées, considérons l'écoulement de la *figure 9*, et les deux modèles analogiques « direct » et « inverse » représentés *figures 10 et 11*. On a vu plus haut que les frontières $\varphi = C^{\text{te}}$ telles que $O_1 A_1 B_1$ et $O_2 A_2 B_2$ deviennent des bords isolants dans l'analogie « inverse », et que les lignes de

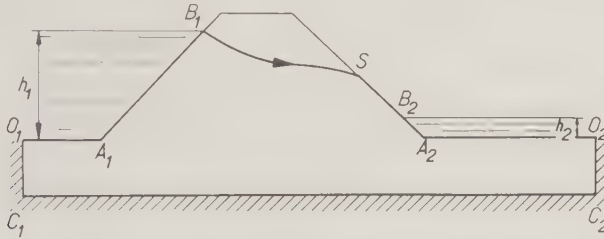


Fig. 9

courant telles que $O_1 C_1 C_2 O_2$ et la surface libre $B_1 S$ deviennent des équipotentiels électriques (*fig. 11*). Il reste à définir les valeurs de ψ le long de la surface (ou segment) de suintement $B_2 S$, afin d'y imposer une condition de DIRICHLET. Cette frontière sera munie d'électrodes dont on réglera les potentiels aux valeurs ψ .

Si nous appelons s l'abscisse curviligne le long de la frontière $O_2 A_2 B_2 S$, avec $s = 0$ pour O_2 , nous pouvons écrire la relation (7) sous la forme :

$$\psi'_s = \varphi'_n.$$

φ'_n étant la dérivée de φ prise normalement à la frontière. Par suite :

$$(14) \quad \psi(s) = \int_0^s \varphi'_n ds.$$

D'autre part, le flux q_k traversant la frontière sur la largeur d'une électrode, limitée par les abscisses s et $s + \varepsilon$, est donné par :

$$(15) \quad q_k = \int_s^{s+\varepsilon} \varphi'_n ds.$$

Les valeurs de q_k relatives aux différentes électrodes se calculent, lors de l'analogie directe, à l'aide de la relation :

$$\frac{q_k}{Q} = \frac{i_k}{I},$$

où Q est le débit total traversant le modèle, i_k l'intensité électrique sortant par l'électrode (k), et I l'intensité électrique totale. La valeur de ψ en un point situé entre deux électrodes, d'indices n et $n + 1$, a donc pour valeur :

$$(16) \quad \psi(n) = Q \sum_1^n \frac{i_k}{I}.$$



Fig. 10

On en déduit facilement, en traçant la courbe $\psi(n)$ en fonction de s , les valeurs de ψ aux centres des électrodes bordant le modèle de l'analogie inverse.

On peut remarquer que l'expression (16) ne correspond pas à la substitution d'une sommation à une intégrale, mais doit être considérée comme une somme d'intégrales partielles, car chaque valeur de i_k représente l'intégration de φ'_n pour l'intervalle de l'électrode envisagée (ce qui est évident pour la grande électrode $O_2 A_2 B_2$ de la figure 10).

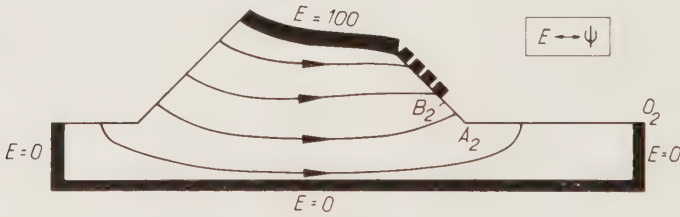


Fig. 11

Notons, pour terminer ce paragraphe relatif à l'analogie inverse, que l'on peut alimenter le modèle le long de la surface de suintement en y injectant par les électrodes des intensités égales à :

$$(17) \quad i(s) = \psi'_n(s) \cdot \vartheta s,$$

ϑs étant la largeur de l'électrode considérée. Cette méthode est possible, puisque l'on connaît $\psi'_n(s)$. En effet :

$$(18) \quad \psi'_n(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s) \sin \theta,$$

θ étant l'angle de la surface de suintement avec l'horizontale.

Mais il est moins facile, pratiquement, d'imposer des intensités que des potentiels. Aussi, je n'ai pas employé cette méthode couramment.

D. — PRÉCISION DE LA MÉTHODE

En vue d'apprécier la précision de la méthode, il était intéressant d'expérimenter des cas théoriques, dont la solution analytique était complètement déterminée. J'ai donc repris les six cas de digues à parois verticales, reposant sur un socle imperméable, et dont les solutions numériques sont données par M. MUSKAT (réf. [2], p. 314).

Les écarts maximums entre les hauteurs de suintement déterminées expérimentalement, et celles calculées, sont de l'ordre de 1 % de la hauteur de charge. Parmi ces exemples, un seul cas (cas n° I de MUSKAT) avait sa surface libre déterminée numériquement (calculs effectués par HAMEL et GUNTHER). Les écarts entre l'expérience et le calcul, relatifs à cette surface, sont également de l'ordre de 1 % (1).

Les débits mesurés expérimentalement ont été comparés aux valeurs données par la formule exacte (2) :

$$(19) \quad Q/K = (h_1^2 - h_2^2)/2L,$$

où h_1 et h_2 sont les hauteurs d'eau des bassins amont et aval, L la largeur de la digue et Q le débit par unité d'épaisseur de digue. Les écarts relatifs variaient, suivant les cas, de 1 à 5 %.

On voit que la précision de cette méthode suffit largement pour résoudre les problèmes d'infiltration. De plus, sa simplicité permet une expérimentation rapide de cas nombreux, et se prête à l'établissement de catalogues d'écoulements à travers des massifs poreux de divers types. On a donc la possibilité de déterminer des formules empiriques pratiques. Les paragraphes qui suivent sont consacrés à quelques exemples de problèmes traités.

III. Étude de quelques problèmes d'infiltrations

A. — POSITION DE LA SURFACE LIBRE ET DÉBIT DANS UNE DIGUE, EN FONCTION DES NIVEAUX DES BASSINS AMONT ET AVAL

1. — Cas d'une digue à parois verticales.

Un modèle de digue à parois verticales, reposant sur un socle imperméable horizontal, de dimensions $h_1 = 60$ cm (hauteur du bassin amont) et $L = 30$ cm (largeur de la digue), a permis le relevé des différentes positions de

(1) Les cinq autres cas de MUSKAT ont des surfaces libres tracées arbitrairement, entre leurs deux extrémités connues, avec une tangente horizontale pour l'extrémité amont, et une tangente verticale pour l'extrémité aval. Il semble que MUSKAT ait un peu trop arrondi la courbe du n° VI près de la paroi aval, pour tenir compte de la pente infinie, car, en cette extrémité de la surface libre, le rayon de courbure est nul (cf. M. BORELI, réf. [6]). La surface obtenue par le modèle analogique avait une allure générale nettement sécante, comme la surface libre calculée du cas n° I, et différait sensiblement de la courbe donnée par MUSKAT dans la région située en aval, bien que la hauteur de suintement elle-même s'accorde avec la valeur calculée à moins de 1 % près.

(2) Cette formule, connue sous le nom de formule de DUPUIT, passe généralement pour une formule approchée, du fait des hypothèses simplificatrices apportées par DUPUIT dans sa démonstration. En réalité, cette formule est théoriquement exacte, et sa démonstration rigoureuse peut être établie sans les hypothèses simplificatrices de DUPUIT. Voir, à ce sujet, l'appendice en fin du chapitre III.

la surface libre et des valeurs du débit Q , pour les valeurs suivantes de la hauteur h_2 du bassin aval :

$$h_2 = 0,9 h_1; \quad 0,8 h_1; \quad 0,7 h_1; \quad \dots; \quad 0,1 h_1; \quad 0.$$

Les résultats relatifs à la surface libre, à la hauteur h_s de la surface de suintement, et au débit Q , sont indiqués respectivement planches I_1 , I_2 et I_3 . Les valeurs expérimentales de Q s'écartent de la théorie [formule (19)] de moins de 3 %.

Un seul modèle analogique a suffi pour toutes ces expériences : la paroi aval du modèle était garnie de petites électrodes de 1 cm de largeur; un certain nombre, variable, des électrodes inférieures étant réunies et portées au potentiel 0, afin de figurer la hauteur d'eau h_2 .

On peut constater, sur la planche I_1 , que la surface libre est pratiquement la même quand h_2 varie entre 0 et le tiers de h_1 , tandis que le débit, dans les mêmes conditions, varie de 10 % (planche I_3).

2. — Digue à parois inclinées symétriques.

Les mêmes expériences ont été faites sur des modèles de digues à parois inclinées symétriques, reposant sur un socle imperméable horizontal, pour les valeurs suivantes d'inclinaisons des talus :

$$\alpha = 10, 20, 30, 50 \quad \text{et} \quad 70^\circ.$$

Les planches I_{4a} à I_{4e} donnent, pour chaque valeur de α , les positions de la surface libre relatives à différents niveaux des bassins amont et aval. Les planches I_{5a} à I_{5e} donnent, dans les mêmes conditions, les valeurs des débits Q correspondants (débits d'infiltration par unité d'épaisseur de digue).

Ce catalogue sommaire a été obtenu en quelques jours à l'aide de cinq modèles conducteurs seulement, c'est-à-dire un modèle par valeur de l'inclinaison α . Quand les expériences relatives à un niveau amont h_1 étaient terminées, le passage à un niveau h_1 inférieur se faisait simplement en rognant la partie supérieure du modèle.

Un fait intéressant est à signaler : le débit Q et la position de la surface libre ne varient pratiquement plus quand le niveau aval h_2 est inférieur au quart du niveau amont h_1 (h_1 , L et α étant constants).

En ne considérant que les cas où h_2 est nul (ou, pratiquement, en vertu de la remarque précédente, quand $h_2 < 0,25 h_1$), j'ai trouvé que le débit Q était donné avec une bonne approximation par la formule :

$$(20) \quad Q/Kh_1 = \frac{h_1}{(0,8 + 0,0045 \alpha) L + 1,18 L'}$$

Dans cette formule, α est exprimé en degrés, et L et L' représentent respectivement les largeurs de la digue aux niveaux 0 et h_1 (figure de la planche I_6).

Dans le tableau de la planche I_6 , sont indiquées les valeurs de Q/Kh_1 mesurées sur modèles analogiques, pour diverses valeurs de h_1/h_m et de l'angle α , h_2 étant nul et

h_m étant égal à $1/2 L \cdot \operatorname{tg} \alpha$. On trouvera, en outre, dans ce tableau, aux colonnes I, II et III, les valeurs correspondantes de Q/Kh_1 évaluées d'après :

- I : la formule empirique proposée;
 II : la formule plus simple $Q/Kh_1 = \frac{h_1}{L + L'}$, rigoureuse dans le cas des digues à parois verticales ($L = L'$);
 III : les deux formules empiriques utilisées dans la pratique ⁽¹⁾, à savoir :

$$Q/Kh_1 = \frac{h_1}{2d} \quad \text{en posant} \quad d = L - 0,7 \cdot h \cdot \cotg \alpha,$$

$$Q/Kh_1 = \frac{a \sin^2 \alpha}{h_1} \quad \text{en posant} \quad a = \frac{h_s}{\sin \alpha},$$

h_s étant la cote du point d'apparition de la surface libre sur la paroi aval.

La première de ces deux formules est utilisée pour :

$$\alpha > 30^\circ;$$

La deuxième est utilisée pour :

$$\alpha \leq 30^\circ.$$

Dans ce tableau sont indiqués, en outre, les écarts relatifs de chaque formule avec les valeurs de Q/Kh_1 mesurées expérimentalement. On voit que la formule empirique que nous proposons donne des écarts moindres, de l'ordre de quelques pour cent. Entre les formules II et III, l'avantage est à la formule II pour les inclinaisons $< 50^\circ$ et à la formule III pour les inclinaisons $> 50^\circ$. De toute façon, les formules I et II sont plus pratiques à employer.

B. INFLUENCE DE DRAINS A L'AMONT D'UN NOYAU IMPERMÉABLE

Les planches I_{7a} , I_{7b} et I_{7c} représentent différents écoulements à travers une digue possédant un noyau imperméable partiel. A l'amont du noyau sont placés deux drains (A) et (B), dont les potentiels peuvent être arbitrairement imposés au moyen de pompes. Ces trois expériences montrent l'influence des drains sur la position de la surface libre, ainsi que les variations de débit qui en résultent.

C. INFLUENCE DE FUITES DANS DES RIDEAUX D'ÉTANCHÉITÉ

Différents écoulements à travers une digue possédant un rideau d'étanchéité percé de trous sont représentés sur les planches I_{8a} à I_{8d} . Dans le dernier cas (planche I_{8d}), on a supposé une faille court-circuitant la base du rideau.

(1) Cf. Ch. MALLET et J. PACQUANT, *Les barrages en terre*, p. 77, éditions Eyrolles.

D. — LIMITATION AMONT OU AVAL DES MODÈLES

Il arrive fréquemment que l'on ait des modèles de digues ou batardeaux reposant sur un sous-sol de profondeur finie mais s'étendant très loin à l'amont et à l'aval de l'ouvrage. Il n'est pas nécessaire de représenter entièrement les parties extrêmes du sous-sol, ce qui permet de construire des modèles moins encombrants. On peut voir, sur l'exemple de la *figure 13*, que la partie amont du modèle, située à une distance du pied de la digue égale à deux fois la profondeur du sous-sol, est pratiquement au potentiel 100 (à moins de 0,1 près, soit 1/1 000 de la charge).

Les problèmes simples que nous venons d'exposer donnent un aperçu des possibilités du papier conducteur dans l'étude des infiltrations. On voit que ces possibilités peuvent être très variées, et qu'en dehors de l'établissement systématique de catalogues, cette technique très simple peut donner des renseignements précieux pour l'étude d'un projet : longueur et position optimum d'un drain, efficacité d'un rideau d'étanchéité, etc. Quelques-uns des exemples traités ont d'ailleurs cette origine.

CHAPITRE II

LES PROBLÈMES PLANS EN MILIEUX HÉTÉROGÈNES ET ANISOTROPES LEUR SOLUTION PAR LA TECHNIQUE DES RÉSEAUX

I. - - Infiltrations en milieu quelconque.

Les infiltrations en milieux hétérogènes ou anisotropes n'obéissent plus à l'équation de LAPLACE mais à une équation aux dérivées partielles d'un type plus général. Nous rappellerons rapidement dans ce qui suit les principaux résultats de la théorie, en supposant les perméabilités principales orientées en tout point suivant des directions constantes. Plus précisément, nous les supposerons horizontale et verticale, ce qui correspond à la majorité des cas pratiques.

A. - ÉQUATION DE BASE

Nous nous limiterons, dans ce chapitre, à l'étude des problèmes plans, les problèmes tridimensionnels faisant l'objet du chapitre III. Soient k_x et k_z les perméabilités principales supposées connues en tout point du domaine, u et w les composantes de la vitesse. La loi de DARCY généralisée s'écrit :

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= -k_x \varphi'_x, \\ w &= -k_z \varphi'_z. \end{aligned}$$

La condition de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

donne, en tenant compte de (1) :

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} (k_x \cdot \varphi'_x) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \cdot \varphi'_z) = 0.$$

B. — PRINCIPAUX CAS PRATIQUES

Différents cas particuliers peuvent se rencontrer dans la pratique :

1° $k_x = C_1$, $k_z = C_2$, C_1 et C_2 étant constants dans tout le domaine : c'est le cas du milieu homogène anisotrope;

2° $k_x = C_1$, $k_z = C_2$, C_1 et C_2 demeurant constants à l'intérieur de certaines zones du domaine, mais variant d'une zone à l'autre : cas des massifs zonés (isotropes ou non, selon que $C_1 = C_2$ ou que $C_1 \neq C_2$);

3° $k_x = k_z = k(x, z)$: cas du milieu isotrope hétérogène.

Pour le cas général (milieu hétérogène et anisotrope), k_x et k_z sont deux fonctions quelconques de x et de z .

C. — CONDITIONS AUX LIMITES PARTICULIÈRES AUX MILIEUX HÉTÉROGÈNES ET ANISOTROPES

1. — Frontière imperméable.

Le fait que le vecteur vitesse n'est plus colinéaire au gradient modifie les conditions aux limites sur les frontières constituées par des lignes de courant.

La vitesse V étant tangente à la frontière (F), on doit avoir, en tenant compte des équations (1) :

$$(3) \quad -k_x \sin \theta \cdot \varphi'_x + k_z \cos \theta \cdot \varphi'_z = 0,$$

θ étant l'angle de la tangente à la frontière avec l'axe des x (*fig. 14*).

Le gradient G est porté par une droite de pente :

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\varphi'_z}{\varphi'_x} = \frac{k_x}{k_z} \operatorname{tg} \theta.$$

L'angle $\omega' = \theta - \omega$ de la *figure 14* est défini par :

$$(4) \quad \operatorname{tg} \omega' = \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \omega} = \frac{(k_z - k_x) \cdot \operatorname{tg} \theta}{k_z + k_x \cdot \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

2. — Surface libre.

La surface libre possède les propriétés d'une frontière imperméable. De plus, le potentiel y est égal à la cote (pour une origine des cotes convenablement choisie), ce qui permet de connaître le gradient en grandeur et en position. En effet, on a, avec les notations de la *figure 15*, et en remarquant que θ est négatif dans cette figure :

$$(5) \quad \varphi'_l = \sin \theta,$$

d'où l'on tire :

$$(6) \quad G = \frac{\varphi'_l}{\cos \omega'} = \frac{\sin \theta}{\cos \omega'}.$$

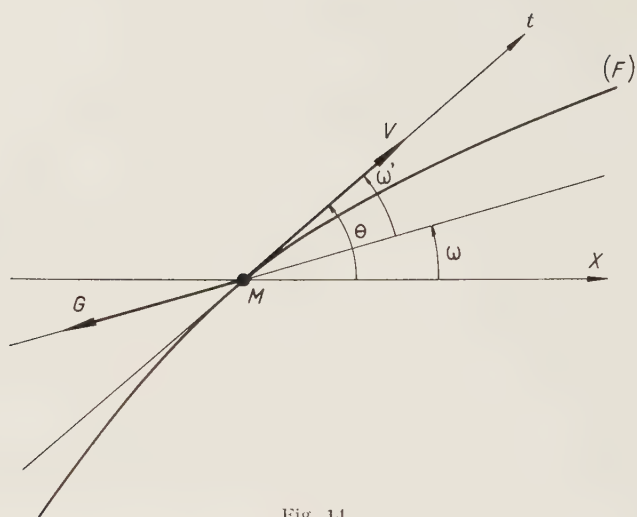


Fig. 14

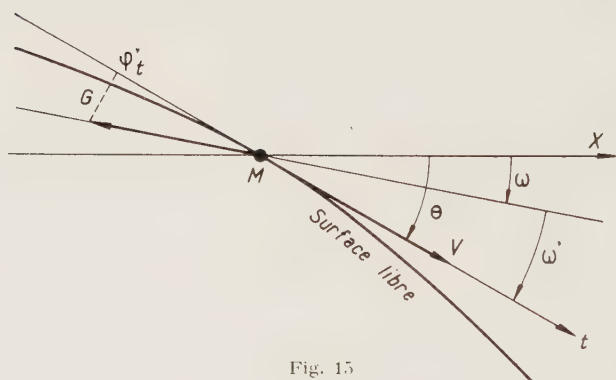


Fig. 15

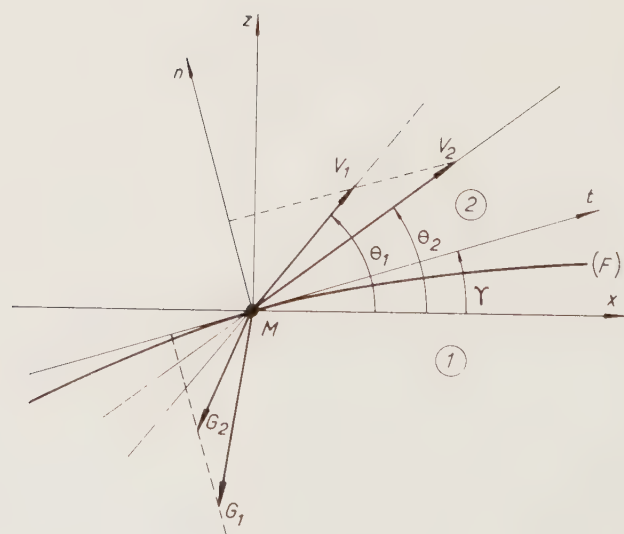


Fig. 16

ainsi que :

$$(7) \quad \varphi'_n = \sin \theta \cdot \operatorname{tg} \omega'$$

et :

$$(8) \quad \begin{aligned} \varphi'_x &= \frac{\sin \theta \cos \omega}{\cos \omega'} = k_z \cdot \operatorname{tg} \theta \\ \varphi'_z &= \frac{\sin \theta \sin \omega}{\cos \omega'} = k_x \cdot \operatorname{tg}^2 \theta \end{aligned}$$

3. — Passage d'une zone à l'autre.

Dans un massif zoné, les lignes de courant passent d'une zone à l'autre en subissant une réfraction. La condition de conservation du flux traversant la surface de séparation (F) s'écrit :

$$(9) \quad V_1 \cdot \bar{n} = \bar{V}_2 \cdot n,$$

$\bar{V}_1$ et V_2 étant respectivement les vitesses dans les milieux (1) et (2), et $\bar{n}$ la normale à (F). La condition (9) peut s'écrire, avec les notations de la *figure 16* :

$$(10) \quad -(k_x \varphi'_x)_1 \sin \gamma + (k_z \varphi'_z)_1 \cos \gamma = -(k_x \varphi'_x)_2 \sin \gamma + (k_z \varphi'_z)_2 \cos \gamma.$$

D'autre part, l'égalité des dérivées de φ suivant (F), dans les milieux (1) et (2) (continuité des pressions), nous donne :

$$(11) \quad G_1 \cdot \bar{t} = G_2 \cdot \bar{t},$$

$\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ étant les gradients dans les milieux (1) et (2). (11) peut s'écrire :

$$(12) \quad (\varphi'_x)_1 \cos \gamma + (\varphi'_z)_1 \sin \gamma = (\varphi'_x)_2 \cos \gamma + (\varphi'_z)_2 \sin \gamma.$$

Les relations (10) et (12) définissent le passage de l'écoulement d'une zone à l'autre. En tenant compte de ce que :

$$(13) \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \left(\frac{k_z \cdot \varphi'_z}{k_x \cdot \varphi'_x} \right)_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \left(\frac{k_z \cdot \varphi'_z}{k_x \cdot \varphi'_x} \right)_2,$$

on tire de (10) et de (12) une relation particulière, exprimant la déviation des lignes de courant :

$$(14) \quad \left[k_x k_z \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \gamma}{k_z + k_x \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \gamma} \right]_1 = \left[k_x k_z \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \gamma}{k_z + k_x \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \gamma} \right]_2.$$

Si l'on fait :

$$(k_x)_1 = (k_z)_1 = k_1 \quad \text{et} \quad (k_x)_2 = (k_z)_2 = k_2,$$

l'équation (14) devient :

$$(15) \quad k_1 \cdot \operatorname{tg} (\theta_1 - \gamma) = k_2 \cdot \operatorname{tg} (\theta_2 - \gamma),$$

propriété classique du passage d'un milieu isotrope à un autre milieu isotrope.

1). PROBLÈMES PRATIQUES POSÉS PAR L'ANISOTROPIE ET L'HÉTÉROGÉNÉITÉ

Nous avons vu plus haut que l'équation de base (2) d'un écoulement en milieu anisotrope et hétérogène n'est plus du type de LAPLACE : la méthode des modèles analogiques en papier conducteur n'est donc plus applicable en général. Néanmoins, elle peut être encore utilisée dans quelques cas particuliers.

1. Massifs zonés, dont les perméabilités des différentes zones homogènes diffèrent dans de faibles proportions.

On peut, dans ce cas, représenter chaque zone par un modèle composé de plusieurs feuilles de papier conducteur empilées les unes sur les autres, les différentes zones étant reliées entre elles par de petites électrodes (*fig. 17*). Le nombre des feuilles empilées ne

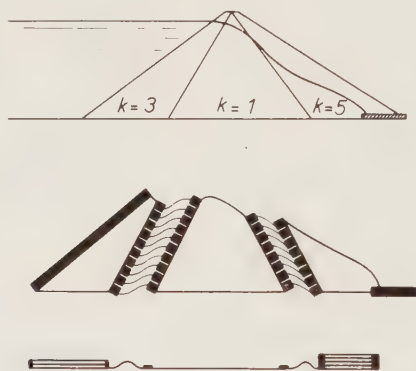


Fig. 17

devant pas être trop élevé, le rapport des perméabilités extrêmes se trouve limité : pratiquement, il ne doit pas dépasser 10.

On peut également perforer le papier conducteur de petits trous, de formes variées, afin de modifier sa résistivité. Cette modification ne peut toutefois être très importante, car les dimensions des perforations doivent être très petites par rapport aux dimensions du modèle.

2. — Massifs anisotropes homogènes.

Si k_x et k_z sont constants, l'équation (2) peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} = 0,$$

en posant :

$$X = (k_x)^{-1/2} \cdot x \quad \text{et} \quad Z = (k_z)^{-1/2} \cdot z.$$

Par suite, un problème en milieu anisotrope homogène peut se ramener, par déformation affine suivant x et z , à un problème isotrope. Cette propriété bien connue est

utilisée couramment. Mais, pratiquement, si le rapport k_x/k_z dépasse 100, le modèle analogique risque d'avoir des dimensions peu commodes (par exemple, modèle trop étroit dans le sens des x , par suite d'une affinité de rapport 1/10 dans ce sens).

Les possibilités de la méthode du papier conducteur semblent donc assez limitées en dehors des problèmes isotropes et homogènes. Par contre, la méthode des réseaux de conductances est particulièrement bien adaptée pour résoudre une équation telle que (2), les coefficients k_x et k_z pouvant varier dans de très larges proportions sans affecter la simplicité de la méthode (réf. [2] à [5]). Seule, l'imposition des conditions aux limites peut apporter quelques complications.

Avant d'envisager l'utilisation des réseaux pour les problèmes d'infiltrations, nous étudierons, dans ce qui suit, les bases théoriques de cette méthode.

II. — Théorie des réseaux de conductances

Soit φ une fonction définie dans un domaine (D), et telle que :

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0,$$

où λ et μ sont des fonctions positives connues de x et z .

Si nous considérons un certain nombre N de points P_i répartis dans (D), l'équation (16), où l'on remplace les dérivées par des différences finies, donne en chaque point P_i :

$$(17) \quad \sum_k C_k (\varphi_k - \varphi_i) + R_i = 0,$$

où φ_i est la valeur de φ en P_i , φ_k sa valeur en un point P_k voisin, et R_i l'erreur due à l'introduction des différences finies. (Nous verrons plus loin qu'elle s'exprime sous la forme d'une série de termes fonctions des dérivées de φ , d'ordres plus ou moins élevés.) Si les points P_k ne sont pas trop éloignés de P_i , R_i peut être négligé dans (17). La fonction φ est alors déterminée par les N valeurs φ_i qu'elle prend aux différents points P_i choisis. Ces valeurs φ_i sont les solutions du système des N équations (17) où l'on a fait $R_i = 0$.

La méthode classique de relaxation (réf. [1]) résout ce système par approximations successives, en évaluant, à chaque itération, la valeur ou « résidu » du premier membre de (17). Le calcul du résidu en chaque point et pour chaque itération rend la méthode assez longue. Son intérêt est que l'on peut, théoriquement, pousser la précision aussi loin que l'on veut, en choisissant un grand nombre de points. Si l'on peut se contenter d'une précision sur φ de l'ordre de quelques millièmes, il est préférable de réaliser simultanément, sous forme de tensions électriques, les valeurs φ_i solutions du système des N équations (17) à l'aide d'un réseau de conductances dont les nœuds coïncident avec les points P_i . Nous verrons plus loin comment construire un tel réseau (c'est-à-dire en calculer les conductances), dont l'utilisation est une sorte de relaxation automatique. Signalons tout de suite que sa précision est limitée, moins par le nombre de points ou « nœuds » nécessaires ou la précision des résistances employées, que par les difficultés qui peuvent être rencontrées dans l'imposition des conditions aux limites.

A. — EMPLOI DES DIFFÉRENCES FINIES

1. — Interpolation entre trois points alignés.

Soit φ_0 , φ_A et φ_B les valeurs d'une fonction $\varphi(x)$ quelconque en trois points 0, A et B, d'abscisses respectives 0, a et $-b$ (a et b étant positifs). Avec les réserves d'usage relatives aux développements limités (fonction φ continue, bornée, ainsi que ses dérivées, etc.), on peut écrire φ sous la forme suivante :

$$(18) \quad \varphi(x) = \varphi_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + E(x),$$

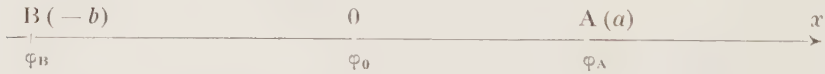
où C_1 et C_2 sont des fonctions de φ_0 , φ_A , φ_B , a et b , et où E ne dépend, en plus de a et de b , que des dérivées de φ d'ordre > 2 . La partie principale de E est de l'ordre de $d^3 \varphi / dx^3$.

Nous donnons ci-dessous une expression de $\varphi(x)$ obtenue par des développements en séries :

$$(19) \quad \begin{aligned} \varphi(x) = & \varphi_0 + \left[\frac{a-b}{ab} \varphi_0 + \frac{b}{a(a+b)} \varphi_A - \frac{a}{b(a+b)} \varphi_B \right] \cdot x \\ & + \left[\frac{-1}{ab} \varphi_0 + \frac{1}{a(a+b)} \varphi_A + \frac{1}{b(a+b)} \varphi_B \right] \cdot x^2 + E(x) \\ = & - \frac{(x-a)(x+b)}{ab} \cdot \varphi_0 + \frac{x(b+x)}{a(a+b)} \cdot \varphi_A + \frac{x(-a+x)}{b(a+b)} \cdot \varphi_B + E(x), \end{aligned}$$

avec :

$$(19') \quad E(x) = \frac{1}{6} x \cdot (x-a)(x+b) \cdot \left(\frac{d^3 \varphi}{dx^3} \right)_0 + \dots$$



De même, les dérivées d'ordre 1 et 2 peuvent s'écrire sous forme polynomiale (degrés 1 et 0, respectivement), à une erreur près dont on peut exprimer la partie principale. Pour les points 0, A et B, ces fonctions prennent les valeurs suivantes :

$$(20) \quad \left. \begin{aligned} \left(\frac{d \varphi}{dx} \right)_0 &= \frac{a-b}{ab} \varphi_0 + \frac{b}{a(a+b)} \varphi_A - \frac{a}{b(a+b)} \varphi_B + E'_0 \\ &= \frac{\varphi_A - \varphi_0}{a} - \frac{\varphi_B - \varphi_0}{b} + E'_0, \\ E'_0 &= - \frac{ab}{6} \left(\frac{d^3 \varphi}{dx^3} \right)_0 + \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (21) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_A &= -\frac{a+b}{ab} \varphi_0 + \frac{2a+b}{a(a+b)} \varphi_A + \frac{a}{b(a+b)} \varphi_B + E'_A \\
 &= -\frac{\varphi_A - \varphi_0}{2a+b} + \frac{\varphi_B - \varphi_0}{a} + E'_A, \\
 E'_A &= \frac{a(a+b)}{6} \left(\frac{d^3\varphi}{dx^3} \right)_0 + \dots;
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_B &= -\frac{a+b}{ab} \varphi_0 - \frac{b}{a(a+b)} \varphi_A - \frac{a+2b}{b(a+b)} \varphi_B + E'_B \\
 &= -\frac{\varphi_A - \varphi_0}{a(a+b)} - \frac{\varphi_B - \varphi_0}{b(a+b)} + E'_B, \\
 E'_B &= \frac{b(a+b)}{6} \left(\frac{d^3\varphi}{dx^3} \right)_0 + \dots;
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)_{0,A,B} &= -\frac{2}{ab} \varphi_0 + \frac{2}{a(a+b)} \varphi_A + \frac{2}{b(a+b)} \varphi_B + E''_{0,A,B}, \\
 E''_0 &= -\frac{a-b}{3} \left(\frac{d^3\varphi}{dx^3} \right)_0 + \dots, \\
 E''_A &= \frac{2a+b}{3} \left(\frac{d^3\varphi}{dx^3} \right)_0 + \dots, \\
 E''_B &= -\frac{a+2b}{3} \left(\frac{d^3\varphi}{dx^3} \right)_0 + \dots.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

2. — Équations aux dérivées partielles.

Cherchons à exprimer l'équation aux dérivées partielles (16) sous la forme (17) en utilisant les résultats précédents. Considérons tout d'abord six points alignés, 0, 1, 3, M, N et J, d'abscisses respectives 0, α , $-\alpha'$, $\frac{\alpha}{2}$, $-\frac{\alpha'}{2}$ et $\frac{\alpha - \alpha'}{4}$; M et N sont les milieux de (0,1) et de (0,3), et J est le milieu de (M,N) (*fig. 18*) :



Fig. 18

Le premier terme de (16), soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right),$$

s'écrit au point 0 :

$$(24) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]_0 = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]_J - 0J \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]_J + \dots$$

D'après l'équation (20) :

$$(25) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]_J = \left[\left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_M - \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_N \right] \cdot \frac{1}{NM} - \frac{(NM)^2}{24} \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} (\lambda \cdot \varphi' x) \right]_J + \dots$$

Or, toujours d'après (20), nous avons :

$$(26) \quad \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_M = \lambda_M \left[\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{0,1} - \frac{0,1^2}{24} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_M + \dots \right]$$

et :

$$(26') \quad \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_N = \lambda_N \left[\frac{\varphi_0 - \varphi_3}{3,0} - \frac{3,0^2}{24} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_N + \dots \right].$$

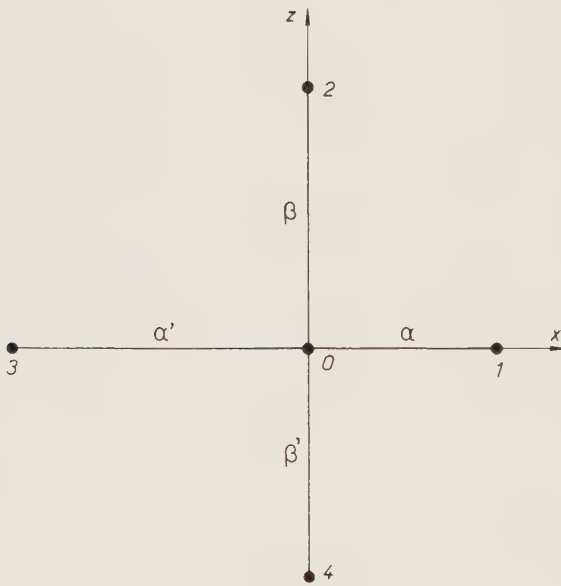


Fig. 19

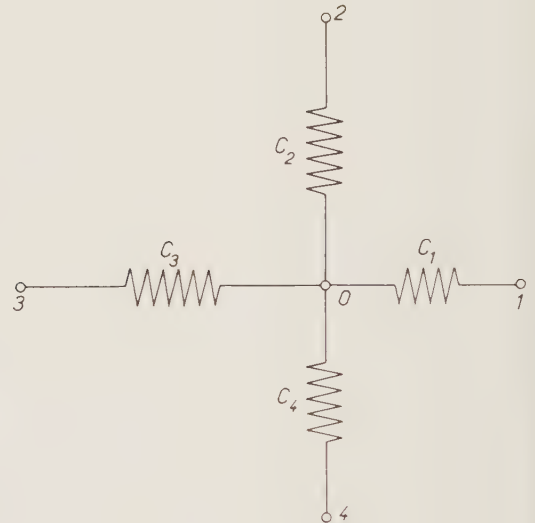


Fig. 20

L'expression (24) s'écrit donc, en tenant compte de (26) et de (26') :

$$(27) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]_0 = \lambda_M \alpha \left(\frac{2}{\alpha' + \alpha} \right) (\varphi_1 - \varphi_0) + \lambda_N \alpha' \left(\frac{2}{\alpha' + \alpha} \right) (\varphi_3 - \varphi_0) + R_0,$$

avec :

$$(28) \quad R_0 = - \frac{\alpha - \alpha'}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]_J - \frac{\lambda_M}{12} \frac{\alpha^2}{(\alpha' + \alpha)} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_M + \frac{\lambda_N}{12} \frac{\alpha'^2}{(\alpha' + \alpha)} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_N + \dots$$

Si α et α' sont suffisamment petits, R_0 peut être négligé. Dans le cas particulier où $\alpha = \alpha'$ et $\lambda = \text{cte}$, la partie principale de R_0 , figurant dans l'égalité (28), s'annule. On montre facilement que l'on a, dans ce cas :

$$(28') \quad R_0 = - \frac{\lambda}{24} \alpha^2 \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right) + \dots$$

On trouve un résultat analogue à (27) pour le second terme de l'équation (16), soit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} ,$$

en considérant deux autres points, soit 2 et 4, alignés avec 0 suivant la direction z . Par suite, si nous considérons cinq points 0, 1, 2, 3 et 4 disposés suivant une croix à branches inégales comme l'indique la *figure 19*, l'équation (16) peut s'écrire au point 0 :

$$(29) \quad \left| \begin{aligned} & \lambda_{0,1} \frac{2}{\alpha (\alpha + \alpha')} (\varphi_1 - \varphi_0) + \mu_{0,2} \frac{2}{\beta (\beta + \beta')} (\varphi_2 - \varphi_0) \\ & + \lambda_{0,3} \frac{2}{\alpha' (\alpha + \alpha')} (\varphi_3 - \varphi_0) + \mu_{0,4} \frac{2}{\beta' (\beta + \beta')} (\varphi_4 - \varphi_0) = 0, \end{aligned} \right|$$

$\lambda_{0,i}$ et $\mu_{0,i}$ étant les valeurs de λ et de μ au milieu du segment $(0, i)$ considéré.

3. — Analogie électrique des réseaux de conductances.

a) CARACTÉRISTIQUES D'UNE CROIX.

L'équation (29) est susceptible d'être « matérialisée » par un montage électrique, Soit C_1 , C_2 , C_3 et C_4 quatre conductances connectées suivant le schéma de la *figure 20*, les bornes ou « nœuds » 1, 2, 3 et 4 étant portées respectivement aux potentiels φ_1 , φ_2 , φ_3 et φ_4 .

La loi des nœuds de KIRCHHOFF appliquée au nœud 0 s'écrit :

$$(30) \quad C_1 (\varphi_1 - \varphi_0) + C_2 (\varphi_2 - \varphi_0) + C_3 (\varphi_3 - \varphi_0) + C_4 (\varphi_4 - \varphi_0) = 0.$$

La comparaison entre les équations (29) et (30) montre que si l'on choisit pour les conductances les valeurs :

$$(31) \quad \left| \begin{aligned} C_1 &= \frac{2 C_0}{\alpha (\alpha + \alpha')} \lambda_{0,1}, \\ C_2 &= \frac{2 C_0}{\beta (\beta + \beta')} \mu_{0,2}, \\ C_3 &= \frac{2 C_0}{\alpha' (\alpha + \alpha')} \lambda_{0,3}, \\ C_4 &= \frac{2 C_0}{\beta' (\beta + \beta')} \mu_{0,4}, \end{aligned} \right|$$

C_0 étant une constante positive quelconque, le potentiel électrique en 0 prend la valeur φ_0 .

b) CARACTÉRISTIQUES D'UN RÉSEAU.

Considérons maintenant un réseau dont les mailles rectangulaires sont constituées par des conductances horizontales et verticales formant des lignes arbitrairement espacées (*fig. 21*). Les valeurs des conductances étant supposées vérifier, en chaque

nœud, les équations (31), les valeurs des potentiels électriques aux nœuds représentent les solutions du système d'équations linéaires formé par les égalités (29) écrites en chaque nœud.

Chaque conductance appartenant à la fois à deux croix différentes doit vérifier deux systèmes d'équations (31). Cherchons dans quelles conditions les deux valeurs trouvées pour chaque conductance peuvent coïncider.

Considérons pour cela la conductance C de la *figure 21*, reliant les nœuds 0 et 1. Les équations (31) écrites en 0 et 1 donnent respectivement, pour C :

$$(32) \quad C = \frac{2 C_0}{\alpha (\alpha + \alpha')} \lambda_{0,1};$$

$$(32') \quad C = \frac{2 C_1}{\alpha (\alpha + \alpha'')} \lambda_{0,1}.$$

Il suffit de prendre C_0 et C_1 proportionnelles à $(\alpha + \alpha') (\beta + \beta')$ et $(\alpha + \alpha'') (\beta + \beta')$ pour que les relations (32) et (32') donnent la même valeur C . D'une façon générale, la constante C_0 des équations (31), relative à un nœud 0 quelconque, doit donc être prise égale à :

$$(33) \quad C_0 = \frac{(\alpha + \alpha') (\beta + \beta')}{4} C,$$

C étant une constante arbitraire commune à tous les nœuds du réseau. On peut remarquer que l'expression (33) ne dépend que des dimensions de la croix considérée. Les équations (31) s'écrivent alors :

$$(34) \quad \left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\beta + \beta'}{2 \alpha} \lambda_{0,1} \cdot C, \\ C_2 &= \frac{\alpha + \alpha'}{2 \beta} \mu_{0,2} \cdot C, \\ C_3 &= \frac{\beta + \beta'}{2 \alpha'} \lambda_{0,3} \cdot C, \\ C_4 &= \frac{\alpha + \alpha'}{2 \beta'} \mu_{0,4} \cdot C. \end{aligned} \right\}$$

Les valeurs des conductances fournies par (34) ne dépendent plus de la croix considérée.

En définitive, nous pouvons construire un réseau de conductances à mailles rectangulaires inégales, arbitrairement choisies, dont les valeurs des potentiels aux nœuds sont solutions des équations aux différences finies (29). Ces valeurs peuvent être considérées comme solutions de l'équation aux dérivées partielles (16) si l'expression R_0 [équat. (28)] et l'expression analogue en μ et z sont négligeables en tout point. Il faut pour cela prendre des dimensions de mailles suffisamment petites.

Remarquons que les expressions (34) peuvent être obtenues à l'aide des formules de TASNY-TSCHIASSNY (réf. [4]) relatives aux mailles triangulaires inégales, dans le cas

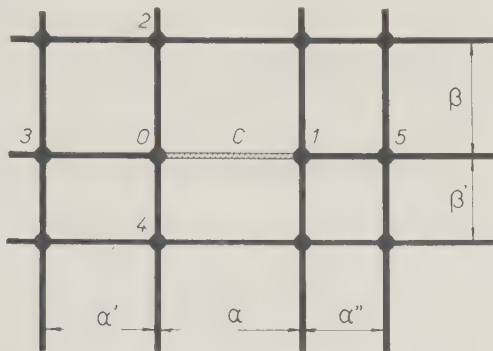


Fig. 21

où ces dernières forment deux à deux des rectangles. TASNY-TSCHIASSNY détermine les valeurs des conductances par un procédé différent, en supposant le champ uniforme à l'intérieur de chaque maille.

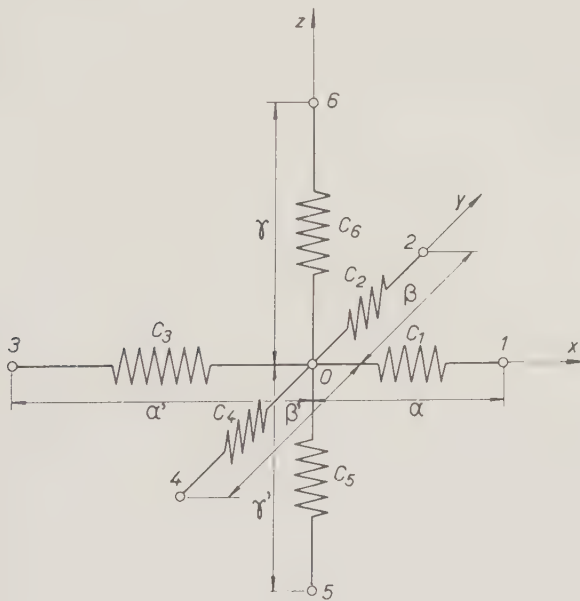


Fig. 22

On montre de même qu'une équation aux dérivées partielles à trois dimensions, du type :

$$(35) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0,$$

peut se résoudre à l'aide d'un réseau à trois dimensions, dont les conductances forment les arêtes de parallélépipèdes rectangles inégaux et dont les valeurs sont données par :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{(\beta + \beta')(\gamma + \gamma')}{4\alpha} \lambda_{0,1} \cdot C, \\
 C_2 &= \frac{(\gamma + \gamma')(\alpha + \alpha')}{4\beta} \mu_{0,2} \cdot C, \\
 C_3 &= \frac{(\beta + \beta')(\gamma + \gamma')}{4\alpha'} \lambda_{0,3} \cdot C, \\
 C_4 &= \frac{(\alpha + \alpha')(\gamma + \gamma')}{4\beta'} \mu_{0,4} \cdot C, \\
 C_5 &= \frac{(\alpha + \alpha')(\beta + \beta')}{4\gamma'} \nu_{0,5} \cdot C, \\
 C_6 &= \frac{(\alpha + \alpha')(\beta + \beta')}{4\gamma} \nu_{0,6} \cdot C,
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

avec les notations de la figure 22.

On trouverait des résultats semblables pour un cas à n dimensions.

1. — Intérêt des mailles rectangulaires inégales.

Nous avons remarqué plus haut que si λ et μ sont constants, l'utilisation de mailles régulières fait intervenir une erreur du quatrième ordre au lieu d'une erreur du troisième ordre [équat. (28) et (28')]. Par ailleurs, E. PERSICO (réf. [6]) démontre, dans le cas de l'équation de LAPLACE, que l'adjonction, à un réseau à mailles carrées, de conductances placées suivant les diagonales, fait passer cette erreur du quatrième ordre au huitième ordre, avec un coefficient égal à $1/10\,080$. Si l'on ajoute à ces considérations que le calcul des conductances est plus long dans le cas de mailles inégales que dans le cas de mailles régulières, il peut sembler *a priori* que l'emploi de ces dernières soit sans intérêt.

En réalité, l'imposition pratique des conditions aux limites, que nous n'avons pas encore envisagées, apporte, dans le cas d'une frontière quelconque coupant les mailles, des erreurs bien plus importantes, généralement de l'ordre de la dérivée seconde. Nous verrons plus loin que l'utilisation de mailles rectangulaires inégales disposées de telle sorte que la frontière ne passe que par des nœuds peut présenter un grand intérêt.

Signalons, d'autre part, que lorsque les termes λ et μ de l'équation (16) varient rapidement dans certaines régions du domaine étudié, on peut maintenir le terme d'erreur R_0 de l'équation (27) en dessous d'une limite convenable en diminuant les dimensions des mailles dans les régions intéressées.

Enfin, l'emploi des mailles inégales permet de représenter facilement, avec peu de mailles, des domaines de grandes dimensions (planche II₇).

B. — CONDITIONS AUX LIMITES

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié les réseaux qu'à l'intérieur du domaine, en supposant convenablement réalisées les conditions aux limites. Nous étudierons, dans ce qui suit, quelques méthodes permettant d'imposer les conditions de DIRICHLET (potentiel connu le long de la frontière), de NEUMANN (dérivée normale connue) et de FOURIER (condition mixte).

1. — Condition de DIRICHLET.

Si le contour du domaine étudié ne passe que par des nœuds, il suffit d'imposer la valeur connue du potentiel en chacun des nœuds situés sur le contour (*fig. 23*). Les autres nœuds, intérieurs au domaine, appartiennent à des croix entières. Par suite, les formules (34) permettant de calculer les conductances du réseau, s'appliquent sans difficultés.

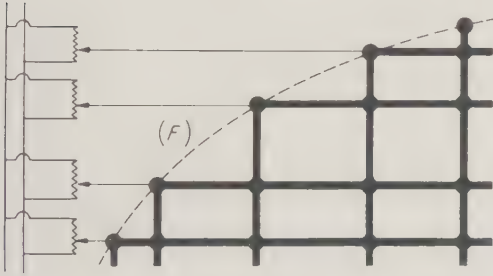


Fig. 23

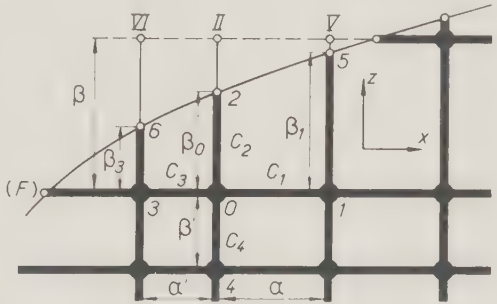


Fig. 24

Il n'en est plus de même dans le cas général où le contour coupe les mailles (*fig. 24*) : une conductance telle que C_1 , joignant les nœuds 0 et 1, est affectée de deux valeurs différentes, soit :

$$(37) \quad \frac{\beta_0 + \beta'}{2\alpha} \lambda_{0,1} \quad \text{et} \quad \frac{\beta_1 + \beta'}{2\alpha} \lambda_{0,1},$$

suivant que l'on écrit les formules (34) au nœud 0 ou au nœud 1. Cette double détermination se produit pour toutes les conductances proches de la frontière, mais n'y aboutissant pas. Elle est due, comme on le voit d'après les expressions (37), à la différence des longueurs des brins coupés, telles que β_0 et β_1 .

a) MÉTHODE DES MOYENNES.

Une première méthode consiste à prendre la moyenne des valeurs trouvées, soit, pour la conductance C_1 de la *figure 24* :

$$(38) \quad C_1 = \frac{\beta_0 + \beta_1}{2} + \beta' \cdot \lambda_{0,1} \simeq \frac{\beta_{0,1} + \beta'}{2\alpha} \cdot \lambda_{0,1},$$

$\beta_{0,1}$ étant la distance verticale du milieu du segment (0,1) à la frontière.

L'expression (38) est indiquée par LIEBMANN qui l'obtient par l'analogie des pavés conducteurs (réf. [5]).

b) AUTRE MÉTHODE.

Une autre méthode, dont on verra qu'elle est plus satisfaisante lorsque la frontière (F) est sensiblement inclinée par rapport aux directions x ou z , repose sur les considérations suivantes : imaginons le réseau prolongé au-delà de (F), de sorte que (fig. 24) les brins verticaux 3,6, 0,2, 1,5, etc., aboutissent à des points extérieurs VI, II, V, ..., alignés suivant une horizontale. Posons :

$$3,VI - 0,II = 1,V = \dots = \beta.$$

Dans le réseau ainsi agrandi, les conductances ne sont plus déterminées que de façon unique par les formules (34). En particulier, au point 0, l'équation de base (16) peut s'écrire sous forme de différences finies :

$$(39) \quad \frac{\beta' + \beta}{2\alpha} \cdot \lambda_{0,1} \cdot (\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta} \cdot \mu_{0,II} \cdot (\varphi_{II} - \varphi_0) \\ + \frac{\beta' + \beta}{2\alpha'} \cdot \lambda_{0,3} \cdot (\varphi_3 - \varphi_0) + \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta'} \cdot \mu_{0,4} \cdot (\varphi_4 - \varphi_0) = 0,$$

en appelant $\mu_{0,II}$ la valeur de μ au milieu du segment $0,II$.

Les données concernent les potentiels φ_6 , φ_2 , φ_5 et non φ_{VI} , φ_{II} , φ_V . Mais si l'on admet l'égalité suivante :

$$(40) \quad \mu_{0,II} \cdot \frac{\varphi_{II} - \varphi_0}{\beta} = \mu_{0,2} \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{\beta_0},$$

qui exprime approximativement, sous forme de différences finies, que $\mu \cdot d\varphi/dz$ est constant entre les milieux des segments $0,II$ et $0,2$, on peut remplacer $(\varphi_{II} - \varphi_0)$, dans l'équation (39), par une expression en $\varphi_2 - \varphi_0$. (39) devient alors :

$$(41) \quad \frac{\beta' + \beta}{2\alpha} \cdot \lambda_{0,1} \cdot (\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta_0} \cdot \mu_{0,2} \cdot (\varphi_2 - \varphi_0) \\ + \frac{\beta' + \beta}{2\alpha'} \cdot \lambda_{0,3} \cdot (\varphi_3 - \varphi_0) + \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta'} \cdot \mu_{0,4} \cdot (\varphi_4 - \varphi_0) = 0.$$

Par suite, nous pouvons imposer au nœud 2 le potentiel connu φ_2 , en choisissant les conductances issues de 0 égales à :

$$(42) \quad \left| \begin{array}{ll} C_1 = \frac{\beta' + \beta}{2\alpha} \cdot \lambda_{0,1}, & C_3 = \frac{\beta' + \beta}{2\alpha'} \cdot \lambda_{0,3}, \\ C_2 = \frac{\alpha + \alpha'}{2\beta_0} \cdot \mu_{0,2}, & C_4 = \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta'} \cdot \mu_{0,4}. \end{array} \right.$$

Les valeurs de C_2 et C_4 sont les mêmes que celles données par les formules (34) écrites en 0. Les valeurs de C_1 et de C_3 sont différentes : le terme β_0 est remplacé par la longueur β . Ainsi, l'hypothèse faite sur $\lambda \cdot \partial \varphi / \partial x$ ou $\mu \cdot \partial \varphi / \partial z$ permet de supprimer les doubles déterminations des conductances voisines de la frontière mais n'y aboutissant pas, telles que C_1 , en remplaçant, dans leurs expressions données par les formules (34), les différentes longueurs des brins coupés parallèles par une longueur unique β . On peut voir, sur la *figure 24*, comment on doit déterminer β .

La méthode s'applique aisément à tous les cas de brins coupés qui peuvent être rencontrés le long de la frontière.

c) COMPARAISON DES DEUX MÉTHODES.

Cherchons à comparer les erreurs introduites par chacune des deux méthodes décrites aux paragraphes *a)* et *b)*. Pour simplifier l'exposé, supposons λ et μ constants et égaux à 1. L'équation de base écrite au point 0 (notations de la *fig. 24*), sous forme de différences finies, est :

$$(43) \quad \frac{\beta' + \beta_0}{2\alpha} (\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta_0} (\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{\beta' + \beta_0}{2\alpha'} (\varphi_3 - \varphi_0) + \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta'} (\varphi_4 - \varphi_0) = 0.$$

D'autre part, pour l'une ou l'autre méthode, on a (loi de KIRCHHOFF) :

$$(44) \quad C_1 (\varphi_1 - \varphi_0) + C_2 (\varphi_2 - \varphi_0) + C_3 (\varphi_3 - \varphi_0) + C_4 (\varphi_4 - \varphi_0) = 0.$$

D'où, par soustraction entre (43) et (44) :

$$(45) \quad \left[C_1 - \frac{\beta' + \beta_0}{2\alpha} \right] \cdot (\varphi_1 - \varphi_0) + \left[C_3 - \frac{\beta' + \beta_0}{2\alpha'} \right] \cdot (\varphi_3 - \varphi_0) = 0,$$

en tenant compte que pour les méthodes *a)* et *b)* on a :

$$C_2 = \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta_0} \quad \text{et} \quad C_4 = \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta'}.$$

En remplaçant dans (45) C_1 et C_3 par leurs valeurs données par *a)* ou *b)*, le premier membre de cette équation prend une valeur $\neq$ non nulle. Évaluons la valeur de ce « résidu » dans chacune des deux méthodes :

— *Méthode a).* — En prenant :

$$C_1 = \frac{\beta_1 + \beta_0}{2} + \beta' \quad \text{et} \quad C_3 = \frac{\beta_3 + \beta_0}{2} + \beta',$$

nous obtenons :

$$(46) \quad \vartheta \simeq \frac{\beta_1 - \beta_3}{4} (\partial \varphi / \partial x)_0 + \frac{\alpha (\beta_1 - \beta_0) + \alpha' (\beta_3 - \beta_0)}{8} (\partial^2 \varphi / \partial x^2)_0;$$

— Méthode b). — Dans ce cas :

$$C_1 = \frac{\beta + \beta'}{2\alpha} \quad \text{et} \quad C_3 = \frac{\beta + \beta'}{2\alpha'},$$

ce qui donne :

$$(47) \quad \vartheta \simeq \frac{(\beta - \beta_0)(\alpha' + \alpha)}{4} (\partial^2 \varphi / \partial x^2)_0.$$

Nous voyons qu'en général, lorsque les longueurs des brins coupés varient sensiblement, l'expression (46) de ϑ [méthode a)] est de l'ordre de la dérivée première de φ , tandis que l'expression (47) [méthode b)] est toujours de l'ordre de la dérivée seconde.

d) COMPARAISON EXPÉRIMENTALE.

J'ai essayé les deux méthodes sur un cas théorique calculable représentant la répartition du potentiel entre deux équipotentielles concentriques, avec $\lambda = \mu = C^{\text{te}}$ (champ électrique dans le diélectrique, supposé homogène et isotrope, d'un condensateur cylindrique). Les résultats sont portés sur la planche II₁, ainsi que le schéma du réseau employé. Un secteur de 45° seulement a été utilisé, par suite de la symétrie du réseau.

A chaque nœud, en haut et à gauche, est indiquée la valeur théorique de φ . En haut et à droite, l'écart, par rapport à la théorie, de la valeur de φ mesurée expérimentalement, en utilisant la méthode b). En bas et à droite, l'écart obtenu avec la méthode a). Les valeurs obtenues avec b) sont nettement meilleures : l'écart maximum, dans ce cas, est de 0,34 (échelle 0-100 du potentiel), au lieu de 0,84 pour a), et correspond à un écart graphique sur les équipotentielles d'environ 1/30 de longueur de maille dans le sens vertical et de 1/70 dans le sens horizontal.

Un exemple où $\lambda = \mu = f(x, z) = r$ est donné par LIEBMANN (réf. [5]) : il s'agit du champ électrique dans un condensateur sphérique. L'erreur maximum est de 0,7 (échelle 0-100 du potentiel), ce qui correspond à des écarts graphiques sur les équipotentielles de 1/18 et de 1/50 de longueur de maille respectivement, dans le sens vertical et dans le sens horizontal.

2. - Condition de NEUMANN.

Nous supposons connue, en tout point de la frontière (F), la valeur de la fonction $\varphi'_n = d\varphi/dn$, n étant le vecteur unité normal à (F) au point considéré, et dirigé vers l'extérieur du domaine.

La figure 25 représente une frontière quelconque (F) coupant les mailles du réseau en des nœuds tels que 6, 2, 5, ... Ici encore, comme pour la condition de DIRICHLET, se pose le problème de la double détermination des conductances telles que C_3 et C_1 . Nous supposerons ce problème résolu par l'adoption de la méthode décrite plus haut

[méthode *b*), p. 32], c'est-à-dire en utilisant les formules (42) pour calculer les conductances issues d'un nœud tel que 0. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\beta' + \beta}{2\alpha} \lambda_{0,1}, \\
 C_2 &= \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta_0} \mu_{0,2}, \\
 C_3 &= \frac{\beta' + \beta}{2\alpha'} \lambda_{0,3}, \\
 C_4 &= \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta'} \mu_{0,4}.
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

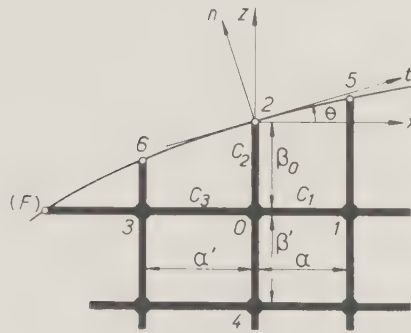


Fig. 25

La condition de NEUMANN pose un nouveau problème par rapport à la condition de DIRICHLET : nous ne connaissons pas le potentiel φ_2 au nœud 2 et ne pouvons, par suite, l'imposer. Il faut néanmoins alimenter la conductance C_2 aboutissant à ce nœud.

L'intensité I parcourant C_2 est égale à :

$$\begin{aligned}
 I &= C_2 (\varphi_2 - \varphi_0) \\
 &= C_2 \left[\beta_0 (\varphi'_z)_2 - \frac{\beta_0^2}{2} (\varphi''_{zz})_2 + \dots \right].
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

a) ON TIEN COMPT DES DÉRIVÉES SECONDES.

Nous supposons, afin de simplifier l'exposé, que $\lambda = \mu = 1$, c'est-à-dire que l'équation de base (16) se réduit à l'équation de LAPLACE. L'expression (48) devient alors :

$$I = \frac{\alpha + \alpha'}{2} \left(\varphi'_z - \frac{\beta_0}{2} \varphi''_{zz} \right),
 \tag{49}$$

les valeurs des dérivées étant prises au point 2.

Soit $\bar{t}$ le vecteur unité porté par la tangente à (F) au point 2, faisant un angle θ avec la direction $\bar{x}$ (*fig. 25*). On montre facilement que :

$$(50) \quad \varphi'_z = \varphi'_t \sin \theta + \varphi'_n \cos \theta$$

et que :

$$(51) \quad \varphi''_{z^2} = \varphi''_{t^2} \cdot \sin^2 \theta + \varphi''_{nt} \cdot \sin 2 \theta + \varphi''_{n^2} \cdot \cos^2 \theta.$$

En tenant compte de ce que $\varphi''_{t^2} + \varphi''_{n^2} = 0$ (invariance du Laplacien quel que soit le système d'axes rectangulaires choisi), (51) s'écrit :

$$(52) \quad \varphi''_{z^2} = -\cos 2 \theta \cdot \varphi''_{t^2} + \sin 2 \theta \cdot \varphi''_{nt}.$$

Appelons s l'abscisse curviligne d'un point sur (F). En remarquant que :

$$\begin{aligned} \varphi'_t &\simeq \frac{d\varphi}{ds}, \\ \varphi''_{t^2} &\simeq \frac{d^2\varphi}{ds^2}, \\ \varphi''_{nt} &\simeq \frac{d}{ds}(\varphi'_n), \end{aligned}$$

on obtient finalement, pour l'intensité I :

$$(53) \quad I = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \cdot \left[\left(\frac{d\varphi}{ds} \sin \theta + \frac{\beta_0}{2} \cos 2 \theta \cdot \frac{d^2\varphi}{ds^2} \right) + \left(\varphi'_n \cos \theta - \frac{\beta_0}{2} \sin 2 \theta \cdot \frac{d}{ds} \varphi'_n \right) \right].$$

L'expression (53) de I contient des termes en φ'_n et $\frac{d\varphi'_n}{ds}$, soit I_n , et d'autres termes en $d\varphi/ds$ et $d^2\varphi/ds^2$, soit I_s . Les premiers sont connus. Les seconds peuvent s'exprimer sous forme de différences finies, en fonction des potentiels φ_6 , φ_2 et φ_5 et des longueurs des arcs $(\widehat{6,2})$ et $(\widehat{2,5})$.

En remarquant que :

$$(54) \quad (\widehat{6,2}) \simeq \alpha' / \cos \theta \quad \text{et que} \quad (\widehat{2,5}) \simeq \alpha / \cos \theta,$$

on trouve :

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{avec :} \\ I_s = \frac{\cos^2 \theta}{2} \left[\frac{-\alpha \operatorname{tg} \theta + \beta_0 \cos 2 \theta}{\alpha'} (\varphi_6 - \varphi_2) + \frac{\alpha' \operatorname{tg} \theta + \beta_0 \cos 2 \theta}{\alpha} (\varphi_5 - \varphi_2) \right] \\ \text{et :} \\ I_n = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \left[\varphi'_n \cos \theta - \frac{\beta_0}{2} \sin 2 \theta \cdot \frac{d\varphi'_n}{ds} \right] \end{array} \right.$$

Cas particulier : $\theta = C^{\text{te}} = 0$.

C'est le cas d'une frontière parallèle à une ligne de nœuds. Les expressions (55) se simplifient et deviennent :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_s = \frac{\beta_0}{2\alpha'} (\varphi_6 - \varphi_2) + \frac{\beta_0}{2\alpha} (\varphi_5 - \varphi_2), \\ I_n = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \cdot \varphi'_n. \end{array} \right.$$

L'intensité I_s peut être injectée automatiquement en reliant le nœud 2 aux nœuds voisins 5 et 6, par l'intermédiaire de conductances C_5 et C_6 , telles que :

$$(57) \quad \left| \quad C_5 = \beta_0/2\alpha \quad \text{et} \quad C_6 = \beta_0/2\alpha'. \quad \right|$$

L'intensité I_n , qui est connue, peut être injectée par le procédé des grandes résistances (la description de cette méthode est donnée plus loin).

Cas général.

Si (F) est quelconque, $\theta \neq 0$. Il n'est plus possible, dans ce cas, de réaliser I_s en reliant 2 à 5 et 6 car les conductances C_5 et C_6 seraient affectées chacune de deux valeurs différentes, et parfois même de valeurs négatives. Il nous faut alors déterminer I_s par itérations. On se donne arbitrairement les valeurs de I_s le long de (F) ($I_s = 0$, par exemple) et l'on injecte $I_n + I_s$ en chaque nœud du contour. Les valeurs des potentiels relevés sont portées dans l'expression (55) de I_s , ce qui nous donne de nouvelles valeurs d'intensités à injecter. On recommence le même processus plusieurs fois, jusqu'à la convergence du potentiel relevé.

b) ON NÉGLIGE LES DÉRIVÉES SECONDES.

Les expressions (55), qui dérivent de l'équation (49), peuvent être simplifiées si l'on néglige les dérivées secondes de φ au voisinage de chaque nœud situé sur (F). Cette hypothèse simplificatrice est analogue au fait que l'on doit négliger φ''_{xz} au voisinage d'un nœud tel que 0, afin de pouvoir calculer de façon unique les conductances qui y aboutissent. On trouve, avec une telle hypothèse :

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_s = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \sin \theta \cdot \varphi'_s \\ \quad = \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} \left[-\frac{\alpha}{\alpha'} (\varphi_6 - \varphi_2) + \frac{\alpha'}{\alpha} (\varphi_5 - \varphi_2) \right], \\ I_n = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \cos \theta \cdot \varphi'_n. \end{array} \right.$$

On peut déterminer I_s par itérations, comme nous l'avons vu précédemment. Mais il est possible, en utilisant les formules simplifiées (58), de réaliser I_s en connectant

le nœud considéré 2 aux nœuds voisins. Deux méthodes sont possibles : la première, utilise des conductances en diagonales; l'autre, n'utilise que des conductances placées en bordure du domaine, mais son application est moins générale.

α) Méthode des diagonales.

Cherchons à réaliser l'intensité I_s , donnée par l'expression (58), en connectant le nœud 2 aux nœuds 5, 6 et 1, au moyen des conductances C_5 , C_6 et d_1 (voir schéma et notations *fig. 26*) dont les valeurs restent à préciser, et en injectant au nœud 2 une intensité supplémentaire I'_2 qui s'ajoutera à I_n , et dont la valeur doit être calculable *a priori*.

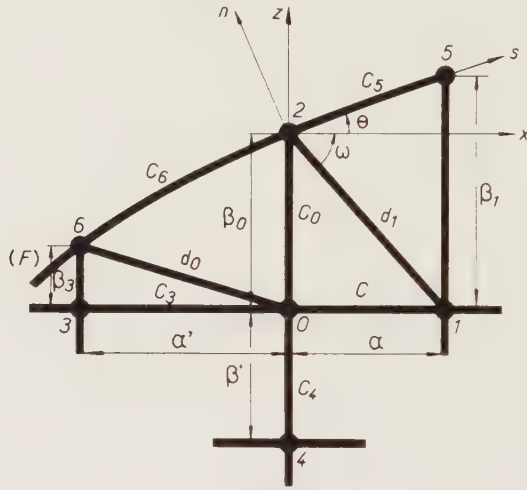


Fig. 26

Les valeurs de C_5 , C_6 , d_1 et de I'_2 doivent vérifier :

$$(59) \quad C_5 (\varphi_5 - \varphi_2) + C_6 (\varphi_6 - \varphi_2) + d_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + I'_2 = I_s.$$

En remarquant (*fig. 26*) que :

$$\varphi_6 - \varphi_2 \simeq -\frac{\alpha'}{\cos \theta} \varphi'_s,$$

$$\varphi_5 - \varphi_2 \simeq \frac{\alpha}{\cos \theta} \varphi'_s,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 \simeq \frac{\alpha}{\cos \omega} [\varphi'_s \cos (\theta + \omega) - \varphi'_n \sin (\theta + \omega)],$$

et que, d'autre part, $\tan \omega = \beta_0/\alpha$, l'équation (59) s'écrit :

$$(60) \quad \left[-\frac{\alpha'}{\cos \theta} C_6 + \alpha C_5 + (\alpha \cos \theta - \beta_0 \sin \theta) d_1 - \frac{\alpha + \alpha'}{2} \sin \theta \right] \varphi'_s$$

$$d_1 (\alpha \sin \theta + \beta_0 \cos \theta) \varphi'_n + I'_2 = 0.$$

Pour que (60) soit vérifiée quels que soient φ'_s et φ'_n , il faut avoir :

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha' C_6}{\cos \theta} + \alpha C_5 + (\alpha \cos \theta - \beta_0 \sin \theta) d_1 - \frac{\alpha'}{2} \sin \theta = 0, \\ I'_2 = d_1 (\alpha \sin \theta + \beta_0 \cos \theta) \varphi'_n. \end{array} \right.$$

D'où une solution, en tenant compte de ce que $\beta_0 - \beta_3 \simeq \alpha' \cdot \operatorname{tg} \theta$ et que $\beta_1 - \beta_0 \simeq \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta$:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_6 = \beta_3 \frac{\cos^2 \theta}{2 \alpha'}, \\ C_5 = \beta_0 \frac{\cos^2 \theta}{2 \alpha}, \\ d_1 = \frac{\alpha \operatorname{tg} \theta}{2 (\alpha - \beta_0 \cdot \operatorname{tg} \theta)} \simeq \frac{1}{2 \left[\frac{\alpha}{\beta_1 - \beta_0} - \frac{\beta_0}{\alpha} \right]}, \\ I'_2 = d_1 (\alpha \sin \theta + \beta_0 \cos \theta) \varphi'_n \simeq d_1 \cdot \beta_1 \cdot \cos \theta \cdot \varphi'_n. \end{array} \right.$$

Remarquons que les diagonales doivent être opposées aux angles aigus des mailles trapézoïdales pour avoir une valeur positive.

L'intensité totale I_2 à injecter au nœud 2 est donc égale à :

$$I_2 = I_n + I'_2 = \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} + d_1 \beta_1 \right) \cos \theta \cdot \varphi'_n.$$

Cette expression est bien calculable *a priori*.

L'introduction des conductances en diagonales vient perturber l'équilibre des courants en des nœuds à l'intérieur du domaine, tels que le nœud 0 de la *figure 26*. Un raisonnement analogue au précédent montre que l'on peut prendre :

$$(63) \quad \begin{array}{l} C_0 = \frac{\alpha + \alpha'}{2 \beta_0}, \\ C_1 = \frac{\beta' + \beta_0}{2 \alpha}, \quad d_0 = \frac{1}{2 \left(\frac{\alpha'}{\beta_0 - \beta_3} - \frac{\beta_3}{\alpha'} \right)}, \\ C_3 = \frac{\beta' + \beta_3}{2 \alpha'}, \quad I'_0 = - \frac{d_0 \cdot \beta_3 \cdot \varphi'_n}{\cos \theta}, \\ C_4 = \frac{\alpha + \alpha'}{2 \beta'}, \end{array}$$

I'_0 étant une intensité calculable à injecter au nœud 0 : notons qu'elle est du signe contraire à φ'_n , c'est-à-dire du signe contraire aux intensités injectées sur la frontière elle-même.

Les valeurs de C_0 , C_1 et C_4 , données par les expressions (63), sont les mêmes que celles données par les expressions (34) écrites au nœud 0. Par contre, pour C_3 , la valeur

donnée par (63) est celle de (34) écrite au nœud 3. D'où la règle : dans l'utilisation de la méthode des diagonales, les conductances horizontales ou verticales du réseau peuvent être calculées par les expressions (34), les conductances voisines de la frontière et prêtant à double détermination étant considérées comme appartenant uniquement à la croix ayant le plus petit brin coupé.

Remarquons que dans le cas particulier où la frontière est rectiligne et parallèle à une ligne de nœud ($\theta = 0$), les conductances diagonales et les injections supplémentaires deviennent nulles, et les conductances de bordure, placées le long de la frontière, prennent les valeurs données par les expressions plus rigoureuses (57).

La figure 26 représente un cas où la frontière ne coupe que des brins parallèles. D'autres cas peuvent se produire, qui se résolvent de la même façon : les figures 27 résument tous les cas possibles avec les valeurs des conductances et des intensités à injecter correspondantes.

A titre d'exemple, la planche II₂ représente un écoulement dans une couronne circulaire : la fonction ψ étudiée ici est la conjuguée harmonique du potentiel φ relatif à la planche II₁. Le long des frontières courbes, la condition aux limites est $\varphi'_n = 0$. L'erreur maximum expérimentale sur ψ est de 0,25 % par rapport à la théorie.

Par ailleurs, sur la planche II₃, le même montage est utilisé pour représenter le champ de la planche II₁, où la condition $\varphi = 100$ sur l'une des frontières circulaires est remplacée par la condition de NEUMANN $\varphi'_n = C^e = 10/L$ 2. L'écart maximum par rapport à la théorie atteint ici 1 % : notons que dans cet exemple, la précision avec laquelle sont injectées les intensités (précision de l'ordre de 0,5 %) agit directement sur les valeurs des potentiels. Sur la frontière circulaire où l'on injecte les intensités (frontière où φ doit être le même partout) la dispersion des valeurs de φ mesurées ne dépasse par 0,6 dans l'échelle 0-100.

β) Méthode des conductances de bordure.

Un autre montage, sans diagonales, est possible si la frontière (F) ne coupe que des brins parallèles. En effet, l'intensité I_s à injecter au nœud (2) est égale, d'après (58), à :

$$I_s = \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} \left[-\frac{\alpha}{\alpha'} (\varphi_6 - \varphi_2) + \frac{\alpha'}{\alpha} (\varphi_5 - \varphi_2) \right].$$

Compte tenu de ce que :

$$(\varphi_5 - \varphi_2)/\alpha \simeq (\varphi_6 - \varphi_2)/\alpha' \simeq \varphi'_s,$$

on vérifie facilement que l'injection I_s est réalisée en connectant le nœud 2 aux nœuds 5 et 6 à l'aide de conductances respectivement égales à :

$$(64) \quad \begin{aligned} C_5 &= \frac{\cos^2 \theta}{\alpha} \left(\beta_0 + \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \theta \right) \simeq \frac{\cos^2 \theta}{\alpha} \beta_{0,1} \simeq \frac{\alpha}{(2,5^2)} \cdot \beta_{0,1}, \\ C_6 &= \frac{\cos^2 \theta}{\alpha'} \left(\beta_0 - \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \theta \right) \simeq \frac{\cos^2 \theta}{\alpha'} \beta_{0,3} \simeq \frac{\alpha'}{(6,2^2)} \cdot \beta_{3,0}. \end{aligned}$$

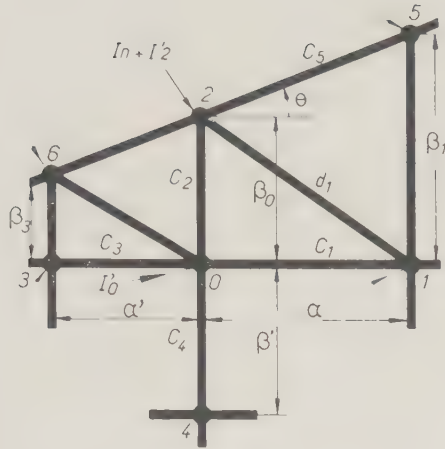


Fig. 27 a

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (\beta' + \beta_0)/2 \alpha; & C_2 &= (\alpha' + \alpha)/2 \beta_0; \\
 C_3 &= (\beta' - \beta_0)/2 \alpha'; & C_4 &= (\alpha' - \alpha)/2 \beta'; \\
 d_1 &= \frac{1}{2} \alpha' \frac{\alpha (\beta_1 - \beta_0)}{\beta_0 (\beta_1 - \beta_0)}; & C_5 &= \beta_0 \cdot \cos^2 \theta / 2 \alpha; \\
 I_n &= (\alpha' + \alpha) \cdot \cos \theta \cdot \varphi' n / 2; \\
 I'_2 &= \beta_1 \cdot d_1 \cdot \cos \theta \cdot \varphi' n; \\
 I'_n &= \beta_1 \cdot d_0 \cdot \varphi' n / \cos \theta.
 \end{aligned}$$

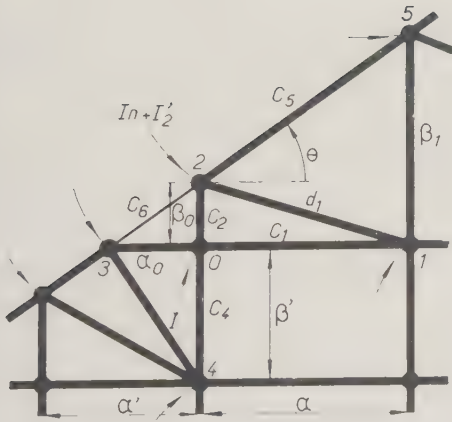


Fig. 27 b

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (\beta' + \beta_0)/2 \alpha; & C_2 &= (\alpha_0 - \alpha)/2 \beta_0; \\
 C_3 &= (\beta' + \beta_0)/2 \alpha_0; & C_4 &= (\alpha_0 - \alpha)/2 \beta'; \\
 d_1 &= \frac{1}{2} \alpha' \frac{\alpha (\beta_1 - \beta_0)}{\beta_0 (\beta_1 - \beta_0)}; & C_6 &= 0; \\
 I_n &= (\alpha_0 - \alpha) \cos \theta \cdot \varphi' n / 2; \\
 I'_2 &= \beta_1 \cdot d_1 \cdot \cos \theta \cdot \varphi' n; \\
 I'_n &= 0.
 \end{aligned}$$

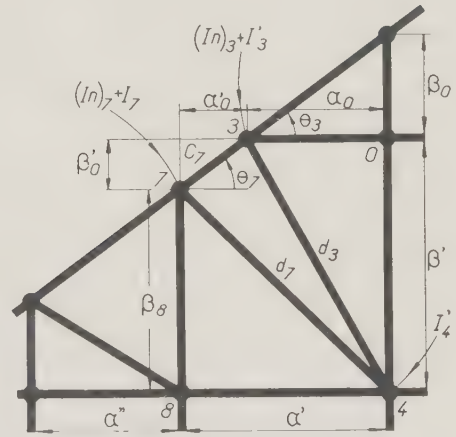


Fig. 27 c

$$\begin{aligned}
 C_7 &= \frac{\sin \theta}{2 \beta'_0} [\alpha_0 \sin \theta - \beta_0 \cos \theta]; \\
 d_3 &= \frac{1}{2} \frac{\beta'_0 \cdot \alpha'_0}{\beta'_0 - \alpha'_0 \alpha'_0}; & d_7 &= \frac{1}{2} \frac{\alpha'_0 \cdot \beta'_0}{\alpha'_0 - \beta'_0 \beta'_0}; \\
 (I_n)_3 &= (\beta' - \beta_0) \cdot \sin \theta_3 \cdot \varphi' n / 2; \\
 I'_3 &= (\beta' + \beta_0) \cdot d_3 \cdot \cos \theta_3 \cdot \varphi' n; \\
 (I_n)_7 &= (\alpha' + \alpha') \cos \theta_7 \cdot \varphi' n / 2; \\
 I'_7 &= (\alpha' + \alpha') \cdot d_7 \cdot \sin \theta_7 \cdot \varphi' n; \\
 I'_1 &= \left(\frac{\alpha_0 \cdot d_3}{\sin \theta_3} + \frac{\beta_0 \cdot d_7}{\cos \theta_7} \right) \cdot \varphi' n.
 \end{aligned}$$

Les valeurs données par les dernières expressions (64) pour les conductances placées le long de la frontière, dans le cas de la *figure* 28, ne dépendent pas du nœud où l'on écrit ces équations. Malheureusement, lorsque la frontière coupe successivement une ligne de nœuds horizontale et une ligne verticale, cette propriété n'est plus vérifiée pour certaines conductances (par exemple, conductance C de la *fig.* 29 c).

Si la précision demandée n'est pas trop grande, on peut alors prendre les moyennes des deux valeurs trouvées pour les conductances en question. Les formules des *figures* 29 b et 29 c, qui sont un compromis de ce genre, donnent néanmoins des valeurs satisfaisantes : un exemple de champ obtenu à l'aide d'un tel montage est donné planche II₄ (il s'agit du champ étudié planche II₂). L'erreur maximum est ici de l'ordre de 1 %.

γ) *Cas où la frontière ne passe que par des nœuds.*

Si l'on peut disposer les mailles rectangulaires du réseau de telle sorte que la frontière (F) passe par des nœuds sans couper les conductances (*fig.* 30), on doit injecter en un nœud tel que 0, situé sur (F), une intensité égale à :

$$(65) \quad I_0 = C_1 (\varphi_0 - \varphi_1) + C_2 (\varphi_0 - \varphi_2).$$

Pour satisfaire aux équations (34) écrites aux nœuds 2 et 1, nous devons prendre :

$$C_1 = \frac{\beta' + \beta}{2\alpha}, \quad C_2 = \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta'}.$$

Par suite, (65) s'écrit :

$$(66) \quad \begin{aligned} I_0 &= \frac{\beta' + \beta}{2\alpha} (\varphi_0 - \varphi_1) + \frac{\alpha' + \alpha}{2\beta'} (\varphi_0 - \varphi_2) \\ &\simeq - \left(\frac{\beta' + \beta}{2} \right) \varphi'_x + \frac{\alpha' + \alpha}{2} \varphi'_z. \end{aligned}$$

D'autre part, l'égalité $n \text{ grad } \varphi = \varphi'_n$ s'écrit :

$$(67) \quad -\varphi'_x \sin \theta + \varphi'_z \cos \theta = \varphi'_n.$$

En tenant compte de (67) et de ce que $\beta' + \beta \simeq (\alpha' + \alpha) \operatorname{tg} \theta$, (66) devient :

$$(68) \quad I_0 = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \varphi'_n = \frac{\beta' + \beta}{2} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \cdot \varphi'_n.$$

L'intensité I_0 est donc calculable *a priori*. La planche II₅ donne un exemple d'un tel montage, le champ réalisé étant le même que celui des planches II₂ et II₄. En chaque nœud sont inscrits la valeur théorique du potentiel et l'écart de la mesure expérimentale. L'écart maximum est de 0,35 %, ce qui est comparable au résultat obtenu par le montage avec diagonales.

Dans le cas plus général de l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0$$

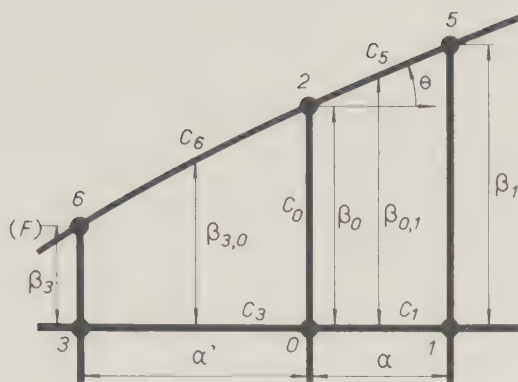


Fig. 28

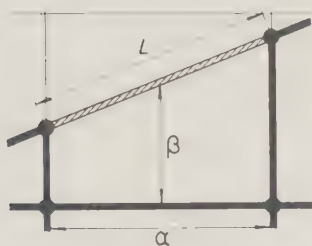


Fig. 29 a

$$C = \alpha \cdot \beta / L^2$$

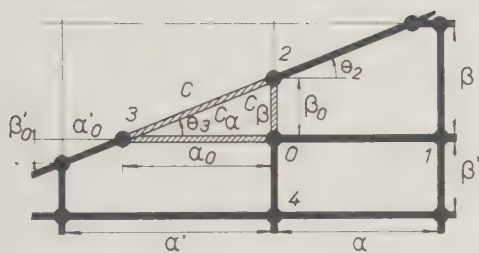


Fig. 29 b

$$C = \alpha_0 \beta_0 / L^2; \quad C_\alpha = \beta' / 2\alpha_0; \\ C_\beta = \alpha / 2\beta_0$$

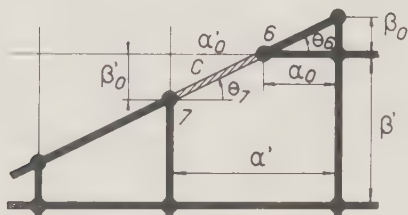


Fig. 29 c

$$C = \frac{3/2 (\alpha' \beta'_0 + \alpha'_0 \beta') - 2 \alpha'_0 \beta'_0}{2 L^2}$$

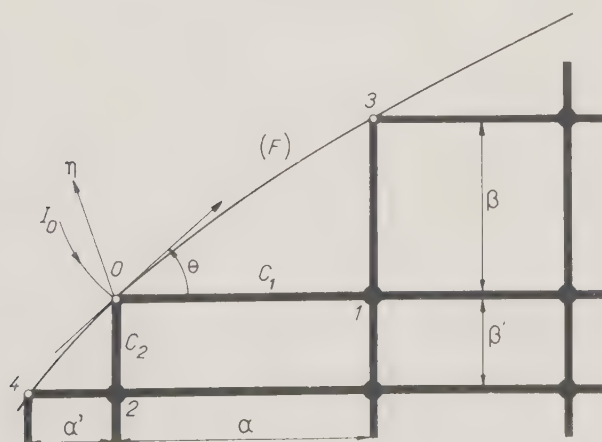


Fig. 30

on obtient, pour l'expression de l'intensité I_0 à injecter :

$$(68') \quad I_0 = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot (-\lambda \varphi'_x \sin \theta + \mu \varphi'_z \cos \theta).$$

Cette expression est nulle dans le cas d'une frontière imperméable d'un écoulement en milieu anisotrope, d'après l'équation (3); il n'y a plus d'injection à faire dans ce cas.

3. — Condition de FOURIER.

Cette condition aux limites est une relation linéaire entre les valeurs de φ et de φ'_n sur la frontière, soit :

$$(69) \quad a \varphi + b \varphi'_n = c.$$

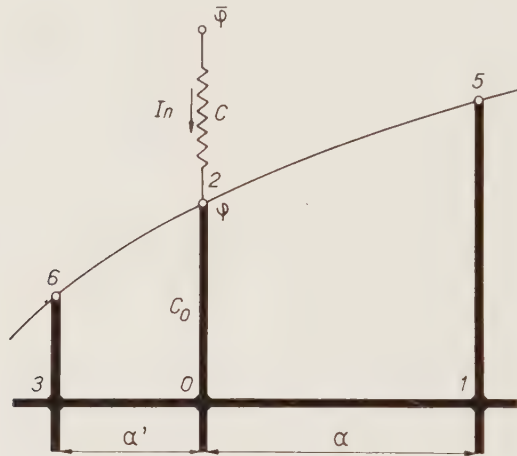


Fig. 31

Les valeurs de a , b et c sont supposées connues en tout point de (F). La relation (69) peut s'écrire :

$$(70) \quad A (\varphi - \varphi_n) = \varphi'_n,$$

en posant :

$$A = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{c}{a}.$$

On sait qu'en un nœud tel que 2 (fig. 31), on doit, pour alimenter C_0 , injecter une intensité I donnée par les relations (58) :

$$(58) \quad \left. \begin{array}{l} \text{avec :} \\ \text{et :} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} I = I_s + I_n, \\ I_s = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \sin \theta \cdot \varphi'_s \\ I_n = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \cos \theta \cdot \varphi'_n. \end{array}$$

L'intensité I_s peut être injectée en utilisant une des méthodes décrites pour la condition de NEUMANN (détermination de I_s par itérations, ou bien injection réalisée par connexions). Quant à I_n , elle est réalisée automatiquement, en reliant le nœud 2 à une borne de potentiel imposé φ , par l'intermédiaire d'une conductance C telle que :

$$(71) \quad C = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \cos \theta \cdot \Lambda.$$

C. — REPRÉSENTATION DE SINGULARITÉS

Dans certains problèmes, la frontière peut présenter un point où le gradient de φ est infini : c'est le cas, par exemple, du sommet d'un angle saillant d'une frontière imperméable dans un problème d'infiltration. La méthode des différences finies n'est plus valable au voisinage d'un tel point, si elle est basée sur l'hypothèse que φ varie comme un polynôme du second degré, car au point singulier, toutes les dérivées de φ sont

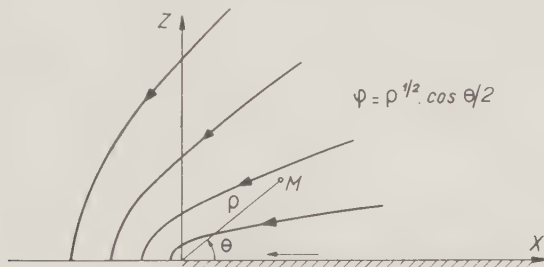


Fig. 32 a

infinies. C'est pourquoi l'utilisation du réseau électrique pour représenter un tel champ donne parfois de fortes erreurs sur les potentiels des nœuds voisins de ce point.

On peut tourner la difficulté en choisissant pour φ une formule d'interpolation différente de la formule du second degré, et mieux adaptée pour représenter les variations de φ au voisinage du point singulier : cette méthode donne, pour les conductances aboutissant à ce point, des valeurs différentes des valeurs classiques.

Nous nous bornerons, dans ce qui suit, au cas de l'équation de LAPLACE.

1. — Extrémité d'une coupure.

Considérons l'écoulement théorique autour d'une coupure semi-infinie portée par le demi-axe Ox . La figure 32 a représente la moitié supérieure de cet écoulement, dont le potentiel complexe est :

$$f(x + iz) = \varphi(x, z) + i\psi(x, z) = (x + iz)^{1/2} + C^te.$$

Soit, d'autre part, un réseau bordé par une frontière rectiligne horizontale, dont une partie est équipotentielle ($\varphi = \varphi_0$) et dont l'autre obéit à la condition de NEUMANN $d\varphi/dn = \varphi'_n$ (fig. 32 b). Soit 0 le point singulier, 1 et 2 les nœuds suivants sur la frontière (confondue avec l'axe des x).

En supposant que φ varie entre les nœuds 0, 1 et 2 comme le potentiel de l'écoulement théorique de la *figure 32 a*, nous pouvons écrire :

$$(72) \quad \varphi(x, 0) = (\varphi_1 - \varphi_0) \left(\frac{x}{\alpha_1} \right)^{1/2} + \varphi_0,$$

φ_1 étant la valeur de φ au nœud 1. Par dérivations, nous obtenons :

$$(73) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} \frac{1}{(\alpha_1 x)^{1/2}}$$

et :

$$(74) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)}{4} \frac{1}{(\alpha_1 x^3)^{1/2}}.$$

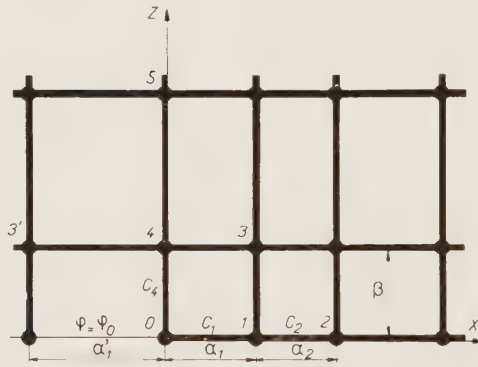


Fig. 32 b

En particulier, au point 1, nous obtenons :

$$(75) \quad \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_1 = - \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{4 \alpha_1^2}.$$

D'autre part, la méthode des différences finies nous donne :

$$(76) \quad \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]_1 = \frac{1}{\beta/2} [(\varphi_3 - \varphi_1)/\beta - (-\varphi'_n)_1],$$

en supposant que φ varie comme une parabole entre les points 1 et 3, avec $-\varphi'_n$ comme dérivée au point 1 (la normale à la frontière est dirigée ici vers le bas). Par suite, (75) et (76) nous permettent d'écrire :

$$(77) \quad [\Delta^2 \varphi]_1 = + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4 \alpha_1^2} + \frac{2}{\beta^2} (\varphi_3 - \varphi_1) + \frac{2}{\beta} (\varphi'_n)_1 = 0.$$

En tenant compte de ce que $\varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_0) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{1/2} + \varphi_0$ [équat. (72) écrite au nœud 2], l'équation (77) peut s'écrire :

$$(78) \quad \left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \beta}{16 \alpha_1^2} + \left(\sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} - 1} \right) \frac{\beta}{2 \alpha_2} \right] (\varphi_0 - \varphi_1) + \frac{\beta}{2 \alpha_2} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2 \beta} (\varphi_3 - \varphi_1) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} (\varphi'_n)_1 = 0.$$

L'équation des nœuds de KIRCHHOFF, écrite en 1, nous donne :

$$(79) \quad C_1 (\varphi_0 - \varphi_4) + C_2 (\varphi_2 - \varphi_1) + C_3 (\varphi_3 - \varphi_1) + I_1 = 0.$$

I_1 étant une intensité injectée au nœud 1. Par suite, la comparaison entre les équations (78) et (79) nous conduit à prendre :

$$(80) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{\beta}{2} \cdot \left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{8 \alpha_1^2} + \left(\sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} - 1} \right) \cdot \frac{1}{\alpha_2} \right], \\ C_2 = \beta / 2 \alpha_2, \\ C_3 = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2 \beta, \\ I_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} (\varphi'_n)_1. \end{cases}$$

Remarquons que les valeurs (80) des conductances C_2 et C_3 , ainsi que de l'intensité I_1 à injecter, coïncident bien avec les valeurs trouvées par la méthode classique [voir les formules (56) et (57), p. 37] : il n'y a donc pas de double détermination pour ces conductances. Seule, la conductance C_1 aboutissant au point critique est modifiée.

On trouve d'une manière analogue, pour la conductance C_4 aboutissant au point 0 (*fig. 32 b*), l'expression :

$$(81) \quad C_4 = \frac{\alpha_1 + \alpha'_1}{2} \cdot \left[\frac{\beta' + \beta}{8 \beta^2} + \left(\sqrt{\frac{\beta' + \beta}{\beta} - 1} \right) \frac{1}{\beta'} \right].$$

Dans le cas particulier d'un réseau à mailles carrées, nous obtenons le schéma de la *figure 33* : les conductances modifiées sont égales à :

$$(82) \quad \begin{aligned} C_1 &= 0,332 C \simeq C/3, \\ C_4 &= 0,664 C \simeq 2 C/3, \end{aligned}$$

C étant la valeur commune des conductances à l'intérieur du réseau.

Résultats expérimentaux.

Sur la planche II₆, un exemple de champ comportant un point singulier séparant une équipotentielle d'une ligne de courant est réalisé avec le montage de la *figure 33*.

Les valeurs du potentiel indiquées aux nœuds sont les valeurs relevées à la cuve rhéoelectrique. A côté de chacune de ces valeurs est indiqué l'écart de la mesure au réseau par rapport à la cuve. L'écart maximum est de 0,6 % : la précision est donc

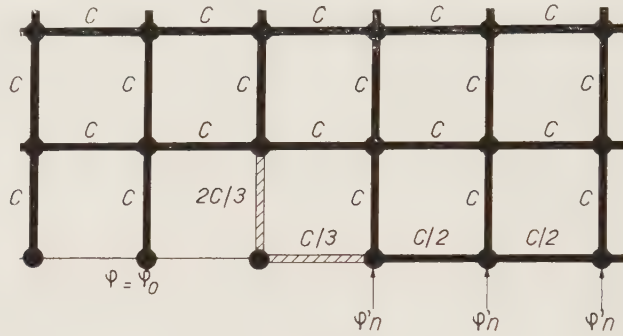


Fig. 33

bonne si l'on tient compte que le réseau donne un écart de 4,7 % au nœud sur la frontière, voisin du point singulier, lorsque les deux conductances aboutissant à ce point sont calculées de façon classique, c'est-à-dire lorsqu'on prend $C_1 = C/2$ et $C_4 = C$ au lieu

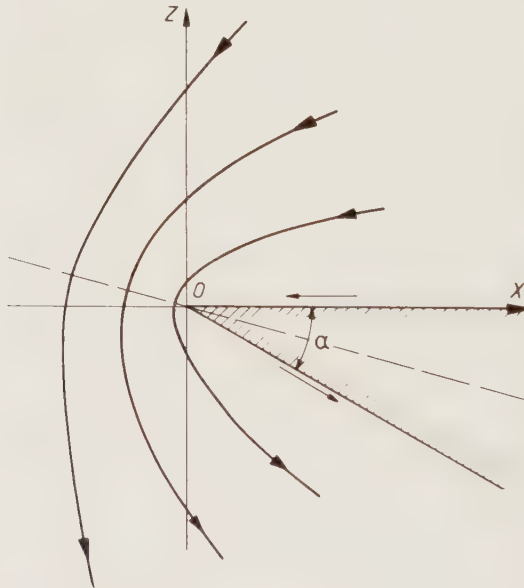


Fig. 34

des expressions (82). L'augmentation de précision apportée par la modification des conductances C_1 et C_4 est donc importante.

Un autre exemple (planche II₇) représente la circulation en milieu infini autour d'une plaque mince de longueur 2 (le champ est réduit ici au quart du plan, par raison

de symétrie). Le long du segment porté par l'axe des x et compris entre l'origine et le point $x = 1$, nous avons $\varphi'_n = 0$. Le restant de Ox et le demi-axe Oz sont portés respectivement aux potentiels 0 et 100.

Le réseau est constitué par des mailles rectangulaires inégales, vingt-sept dans le sens horizontal (représentant une longueur de 5,4) et dix-sept dans le sens vertical (représentant une longueur de 4,4). Ces dimensions suffisent pour représenter le quart de plan infini, du moins lorsqu'on se borne à étudier le champ au voisinage du segment ($x = 0$, $x = 1$). La théorie donne une répartition elliptique du potentiel le long de ce segment. Les valeurs relevées sur le réseau s'écartent de la théorie de 0,5 % au maximum avec les conductances C_1 et C_4 modifiées, et de — 5,23 % avec C_1 et C_4 non modifiées (voir le tableau de valeurs de la planche II₇).

Sur la planche II₈, le même domaine est représenté, mais au lieu d'imposer $\varphi'_n = 0$ le long du segment (0,1), nous avons imposé la condition de FOURIER :

$$\varphi + a \varphi'_n = \varphi,$$

a et φ étant deux fonctions connues de x . D'autre part, le long de Oz , nous avons ici $\varphi'_n = 0$. La théorie montre que l'on doit avoir, le long du segment (0,1) :

$$\varphi = 80 \sin u,$$

$$x = \cos u,$$

si l'on se donne (1) :

$$\varphi = 100 \sin u,$$

$$a = 0,25 \sin u.$$

L'écart maximum des valeurs expérimentales de φ le long de ce segment, par rapport à la théorie, est de — 0,47 ou de — 3,36, selon qu'on modifie ou non les conductances aboutissant au point singulier (voir tableau de la planche II₈).

2. — Angle saillant d'une frontière imperméable.

Dans ce qui précède, nous avons remplacé, au voisinage du point singulier, la formule d'interpolation de φ (formule polynomiale du second degré) par une autre formule s'adaptant mieux aux variations de φ , et inspirée de l'écoulement théorique représenté *figure 32 a*. Nous pouvons généraliser cette méthode pour les cas d'angles saillants en considérant l'écoulement théorique plus général de la *figure 34* : cet écoulement admet pour potentiel complexe :

$$f(Z) = \varphi(x, z) + i \psi(x, z) = Z^{\left(\frac{1}{2 - \alpha/\pi}\right)} = Z^n,$$

(1) On reconnaît là le problème de l'aile portante, traité au moyen de la théorie de PRANDTL.

α étant la valeur de l'angle saillant. Dans les exemples précédents, nous avons $\alpha = 0$. Mais pour $\alpha \neq 0$, la marche à suivre est la même, les formules d'interpolation (72), (73) et (74) devenant respectivement :

$$(72') \quad \varphi(x, 0) = (\varphi_1 - \varphi_0) \left(\frac{x}{\alpha_1} \right)^n + \varphi_0;$$

$$(73') \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = n (\varphi_1 - \varphi_0) \frac{x^{n-1}}{\alpha_1^n};$$

$$(74') \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = n(n-1) (\varphi_1 - \varphi_0) \frac{x^{n-2}}{\alpha_1^n}.$$

La figure 35 donne un exemple de réseau représentant un angle saillant.

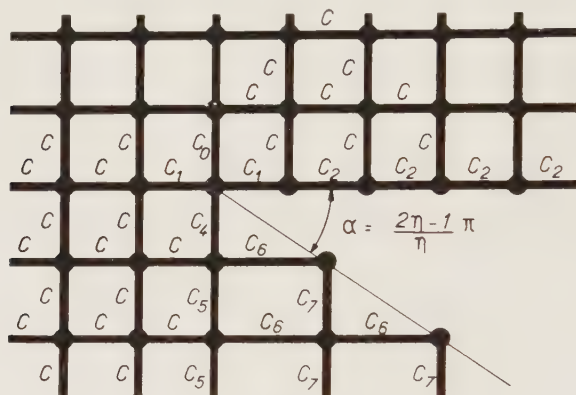


Fig. 35

$$C_0 = [n(1-n) + 2n-1] C \simeq \frac{2n}{n+1} C;$$

$$C_1 = \frac{1}{2} C_0;$$

$$C_3 = C_4;$$

$$C_4 = \frac{1 + \cotg \alpha}{2} C.$$

III. — Application de la méthode des réseaux aux écoulements de filtration

A. — CARACTÉRISTIQUES D'UN ÉCOULEMENT DE FILTRATION ET LEURS REPRÉSENTATIONS ANALOGIQUES

Les différentes méthodes exposées précédemment permettent d'utiliser les réseaux électriques dans l'étude des écoulements de filtration en milieux anisotropes et hétérogènes, avec des conditions aux limites du type de DIRICHLET et de NEUMANN. Examinons en détail les différentes données pouvant caractériser un écoulement de filtration, et voyons quelles méthodes nous pouvons choisir pour les représenter.

1. — Anisotropie et hétérogénéité du milieu perméable.

Conductances placées parallèlement aux directions des perméabilités principales, et calculées à l'aide des formules (34). S'il s'agit d'un massif zoné, où les zones ont des directions principales différentes, on aboutit à un ensemble de réseaux à mailles rectangulaires d'orientations différentes, dont le raccordement peut se faire comme il est indiqué plus loin, au n° 6.

2. — Parement baigné par un réservoir — Drains et puits pleins d'eau.

Condition de DIRICHLET : les valeurs des conductances des croix coupées par la frontière sont données par les formules (42), page 32.

3. — Surface de suintement.

Condition de DIRICHLET également.

4. — Surface imperméable (Bedrock, palplanche).

S'il s'agit d'un milieu isotrope, la condition aux limites est du type de NEUMANN, avec $\varphi'_n = 0$. L'une quelconque des méthodes exposées pages 37 à 44 est applicable : injections (itérations), conductances de bordure, conductances en diagonales, ou disposition des mailles de telle façon que la frontière ne passe que par des nœuds. Les trois dernières méthodes ne nécessitent pas d'injections puisque $\varphi'_n = 0$.

Si le milieu est anisotrope, seules la méthode par injections, où l'on néglige les dérivées secondes, et la méthode des mailles inégales, sont utilisables.

5. — Extrémités de palplanches, de drains, points anguleux.

Les conductances aboutissant à ces points singuliers doivent être modifiées (pp. 47 à 50). On peut également subdiviser les mailles au voisinage du point singulier en des mailles plus petites : les connexions permettant de relier les grandes mailles aux mailles plus petites sont indiquées *figures* 39, 40, 41 et 42, pages 55 et 56 (voir explications à ce sujet p. 54).

6. — Massifs zonés : passage d'une zone à l'autre.

a) CAS OU LES DIRECTIONS DES PERMÉABILITÉS PRINCIPALES SONT LES MÊMES DANS LES DEUX ZONES.

Soit (F) la surface de séparation de deux zones de perméabilités différentes (*fig.* 36). Comment calculer une conductance coupée par (F), telle que la conductance C joignant deux nœuds consécutifs A_1 et A_2 situés dans des zones différentes.

Un procédé simple consiste à considérer C comme étant constituée de deux conductances en série, soit C_1 et C_2 , reliant respectivement A_1 et A_2 au point M, intersection

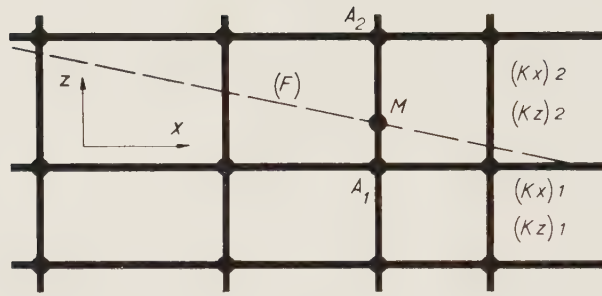


Fig. 36

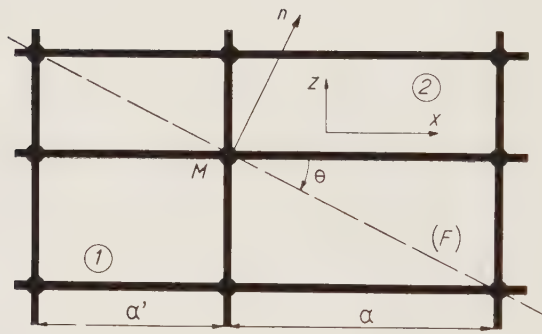


Fig. 37

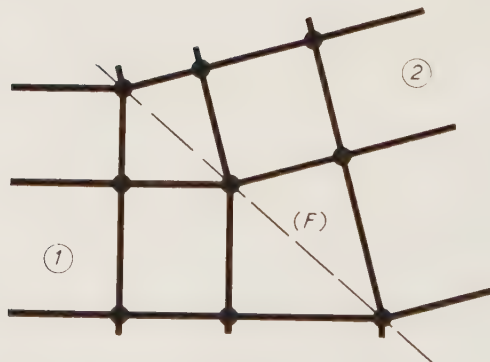


Fig. 38

de (F) et de $A_1 A_2$, et à calculer C_1 et C_2 comme si les réseaux représentant les deux zones étaient indépendants. Ce procédé n'est pas rigoureux, car il conduit à écrire :

$$(k_z)_1 (\varphi'_z)_1 = - (k_z)_2 (\varphi'_z)_2,$$

ce qui n'est vrai que si la direction $\bar{z}$ est normale à (F).

Néanmoins, il est couramment employé, car les perturbations sont faibles (en moyenne, le flux sortant d'une zone est bien égal au flux pénétrant dans l'autre).

Une méthode plus rigoureuse consiste à disposer les mailles inégales du réseau de façon à ce que (F) ne passe que par des nœuds (*fig. 37*). On sait [voir, à ce sujet, (68'), p. 44] que l'intensité à injecter en un nœud tel que M (*fig. 37*) est :

$$I_1 = \frac{\alpha' + \alpha}{2} \frac{1}{\cos \theta} \left[- (k_x)_1 (\varphi'_x)_1 \cdot \sin \theta + (k_z)_1 \cdot (\varphi'_z)_1 \cdot \cos \theta \right],$$

pour le réseau représentant la zone 1, et :

$$I_2 = - \frac{\alpha' + \alpha}{2} \frac{1}{\cos \theta} \left[- (k_x)_2 \cdot (\varphi'_x)_2 \cdot \sin \theta + (k_z)_2 \cdot (\varphi'_z)_2 \cdot \cos \theta \right],$$

pour le réseau représentant la zone 2.

La condition de passage :

$$- (k_x)_1 (\varphi'_x)_1 \sin \theta + (k_z)_1 (\varphi'_z)_1 \cos \theta = - (k_x)_2 (\varphi'_x)_2 \sin \theta + (k_z)_2 (\varphi'_z)_2 \cos \theta$$

[cf. équat. (10), p. 21] entraîne $I_1 = - I_2$, ce qui justifie le montage.

b) CAS OU LES DIRECTIONS PRINCIPALES NE SONT PAS LES MÊMES DANS LES DEUX ZONES.

On peut, dans ce cas, disposer les mailles des réseaux (1) et (2) de telle manière que la séparation (F) ne passe que par des nœuds, communs aux deux réseaux (*fig. 38*). On montre facilement, comme précédemment, que l'alimentation mutuelle des deux réseaux entraîne l'égalité des flux à travers (F).

7. — Surface libre.

La surface libre, inconnue *a priori*, doit être déterminée par approximations successives. Chacune de ces approximations peut être considérée comme une ligne de courant et représentée par l'une quelconque des méthodes indiquées au paragraphe 4, page 51. Le nombre de ces approximations pouvant atteindre cinq ou six, il faut choisir une méthode simple si l'on veut ne pas consacrer trop de temps à la détermination de la surface libre. En particulier, la méthode consistant à disposer les mailles inégales du réseau de telle façon que la surface libre ne passe que par des nœuds, est trop longue, car elle nécessite un remaniement de tout le réseau (et le calcul de toutes les conductances) à chaque approximation de la surface libre.

Nous exposons ci-dessous trois méthodes utilisées pratiquement et dont le choix de l'une d'entre elles dépend du matériel que l'on possède.

a) MÉTHODE EN « ESCALIER ».

Si l'on dispose d'une quantité suffisante de conductances, on peut représenter le modèle à l'aide d'un grand nombre de mailles, chacune de ces mailles étant de petites dimensions (pour fixer les idées, on peut choisir le 1/10 ou moins de la hauteur de charge, dans le cas d'une digue, par exemple). La surface libre est alors représentée grossièrement, à une maille près, et prend l'allure d'un escalier irrégulier. Sa détermination par approximations successives est rapide : il suffit de retirer ou d'ajouter des mailles de manière à vérifier le mieux possible la condition $\varphi = z$ le long de cet escalier.

α) Lissage.

On peut lisser ensuite la surface libre, en tenant compte du fait que ses intersections avec les équipotentiels relevées sur le modèle doivent avoir des cotes bien déterminées (condition $\varphi = z$) et se faire à angle droit (ou sous un angle déterminé dans le cas d'un massif anisotrope) [voir, à ce sujet, formule (4), p. 19]. Ces deux critères sont assez sévères pour ne plus laisser grande liberté dans le tracé de la surface libre.

La forme en escalier du contour du réseau perturbe un peu les extrémités des équipotentiels au voisinage de celui-ci : il ne faut donc pas tenir compte des points expérimentaux relevés tout près du contour, mais extrapoler les équipotentiels sur une distance d'une maille environ.

Lorsque l'on fait ensuite l'analogie inverse (analogie entre la fonction de courant ψ , conjuguée harmonique de φ , et le potentiel électrique, dans le cas d'un massif isotrope, par exemple), la surface libre du nouveau modèle électrique devient équipotentielle. La condition à imposer sur cette frontière est du type de DIRICHLET et se réalise avec précision (brins coupés). Le relevé d'une équipotentielle électrique (ligne de courant de l'écoulement réel), proche de la surface libre, permet de vérifier rapidement si le travail de lissage et d'extrapolation précédent a été effectué correctement : sinon, cette ligne $\psi = C^{\text{te}}$, proche de la surface libre, ne coupe plus à angle droit les extrémités des lignes $\varphi = C^{\text{te}}$. La méthode est assez sensible.

On peut voir, sur les planches II₁₃ et II₁₄, un exemple d'utilisation de la méthode en « escalier », avec lissage de la surface libre et extrapolation des extrémités des équipotentiels. Les points expérimentaux relevés de ces dernières sont indiqués par des points ronds. Une analogie inverse a donné les lignes de courant dont les points expérimentaux relevés sont indiqués par des croix.

β) Passage des grandes mailles aux petites mailles.

Si, dans la méthode « en escalier », il est indispensable d'utiliser des mailles de dimensions petites au voisinage de la surface libre, il est souvent intéressant d'employer des mailles plus grandes dans d'autres régions du modèle, où le gradient n'est pas trop fort, ou bien où la représentation des limites est moins exigeante, ceci dans le but pratique de ne pas aboutir à un nombre prohibitif des conductances employées. On est ainsi amené à construire un modèle de réseau comportant différentes zones, où les dimensions des mailles sont différentes.

Le raccordement des grandes mailles aux petites mailles pose un problème de connexion, qu'il ne semble pas possible de résoudre sans négliger les dérivées secondes de φ . Mais, pratiquement, cette précision est suffisante.

Considérons, pour fixer les idées, deux réseaux à mailles carrées, de dimensions respectives 1 et 2, se raccordant suivant une ligne de nœuds, et représentant deux zones de même perméabilité : les conductances des deux zones, bien que de longueurs différentes, ont alors la même valeur C . Les figures 39 et 40 montrent deux systèmes de

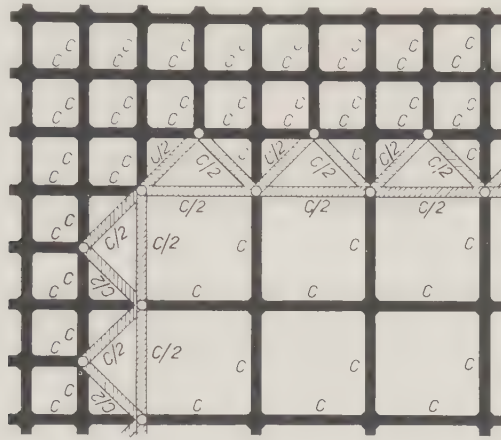


Fig. 39

connexions équivalents, l'un en triangle, l'autre en étoile. Dans le montage de la figure 40, le potentiel, au centre de l'étoile, ne doit pas être relevé. On vérifie facilement que ce montage ne perturbe pas un écoulement uniforme de direction horizontale ou de direc-

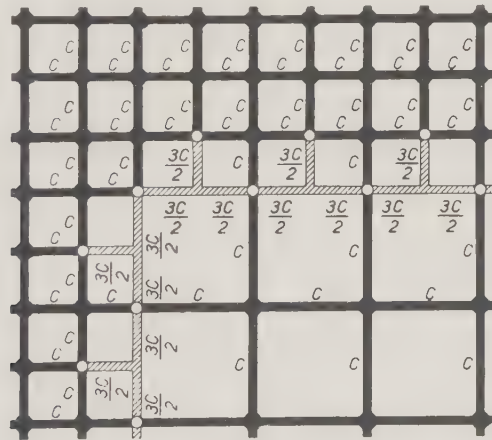


Fig. 40

tion verticale, et, par suite, un écoulement uniforme de direction quelconque (voir réf. [7], p. 97).

Le montage en étoile est d'un emploi plus pratique que le montage en triangle si l'on utilise un réseau à résistances amovibles, dont la description est donnée plus loin. D'autre part, dans la même hypothèse, on a intérêt à ce que le quadrillage du réseau à grandes mailles soit contenu dans le quadrillage du réseau à petites mailles.

D'autres systèmes de connexions entre mailles carrées de dimensions multiples sont donnés par LIEBMANN (réf. [8]).

On peut généraliser les montages des *figures 39 et 40* au cas de mailles rectangulaires inégales : le réseau à grandes mailles étant obtenu à partir du réseau à petites

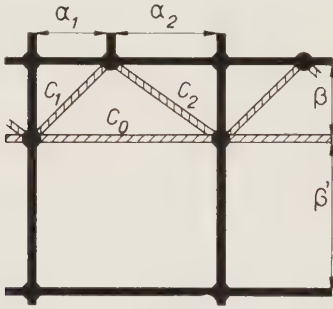


Fig. 41

$$C_0 = \frac{1}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[\beta' \left(\frac{\alpha_1}{\beta} + \frac{\alpha_2}{\beta} \right) \right];$$

$$C_1 = \alpha_1/2 \beta; \quad C_2 = \alpha_2/2 \beta$$

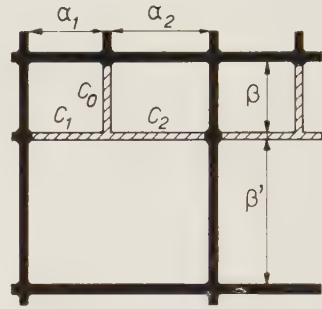


Fig. 42

$$C_0 = \frac{\beta + \beta'}{2} \left[\frac{\alpha_1}{\beta(\beta + \beta')} + \frac{\alpha_2}{\beta(\beta + \beta')} + \frac{\alpha_2}{\beta} \right];$$

$$C_1 = (\beta + \beta')/2 \alpha_1; \quad C_2 = (\beta + \beta')/2 \alpha_2$$

mailles, où l'on a supprimé une ligne (horizontale ou verticale) sur deux. Les *figures 41 et 42* donnent les schémas des montages correspondants : ces montages ne perturbent pas un écoulement uniforme de direction quelconque.

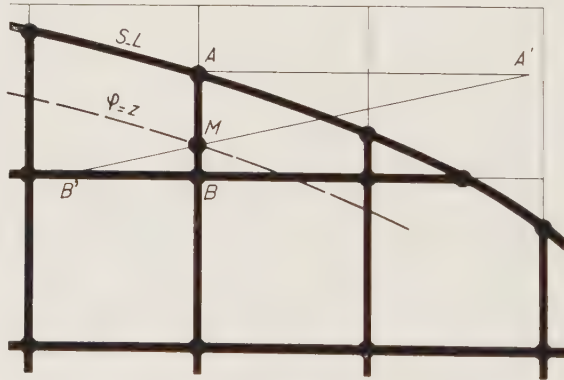


Fig. 43

b) EMPLOI DE CONDUCTANCES DE BORDURE.

Le montage simplifié sans diagonales, indiqué page 43, permet de représenter la surface libre rapidement et avec suffisamment de précision : il est utilisé pour les modèles analogiques construits avec peu de mailles. La planche II₁₀ donne un exemple de détermination de la surface libre dans un barrage à l'aide de cette méthode, avec les différentes approximations successives.

Le processus utilisé ici pour déterminer la surface libre par itérations est le même que dans la méthode du papier conducteur : une position arbitraire de la surface libre

étant choisie, on représente cette position par une frontière ligne de courant. Puis, on relève la ligne des points, à l'intérieur du modèle, où l'on a $\varphi = z$. Cette ligne sert de nouvelle approximation pour la surface libre, et l'on recommence.

Au réseau, on doit interpoler entre les nœuds pour trouver les points où φ est égal à z . Entre deux nœuds situés sur une même horizontale de cote z_0 , on peut interpoler électriquement et chercher le point de potentiel $\varphi = z_0$. Pour cela, on branche entre les deux nœuds considérés un potentiomètre étalonné de forte résistance, et l'on cherche la position du point mobile où celui-ci est au potentiel $\varphi = z_0$. On ne peut, par contre, utiliser ce procédé pour rechercher un point $\varphi = z$ entre deux nœuds situés sur une même verticale (ou, d'une façon générale, non situés à la même cote), car on ne connaît pas la valeur du potentiel du point cherché. Un procédé très simple consiste à interpoler graphiquement sur le schéma du réseau, représenté sur du papier millimétré. Appelons M le point cherché où l'on a $\varphi = z$, situé entre deux nœuds A et B (*fig. 43*), dont les potentiels relevés et les cotes sont respectivement φ_A, z_A et φ_B, z_B . On porte en A et B, horizontalement, deux vecteurs AA' et BB', tels que :

$$AA' = \varphi_A - z_A,$$

$$BB' = \varphi_B - z_B.$$

En supposant φ variant linéairement entre A et B, la différence $\varphi - z$ varie aussi linéairement entre A et B, et, par suite, le point M cherché, où $\varphi = z$, est à l'intersection de AB et de A'B'.

c) MÉTHODE PAR INJECTIONS.

Cette méthode est décrite au chapitre III dans le cas d'un problème à trois dimensions. Signalons simplement que le long de la surface libre, les intensités à injecter dans les brins coupés sont calculables *a priori* (du fait qu'il s'agit d'une ligne de courant et que l'on a $\varphi = z$) et que l'on applique cette propriété aux différentes approximations de la surface libre. On commet ainsi une erreur dans la représentation de chacune des approximations (qui ne possèdent pas la propriété $\varphi = z$), mais cette erreur tend vers zéro quand les approximations tendent vers la vraie position de la surface libre. La méthode converge rapidement. Les planches II₁₁ et II₁₂ représentent deux exemples d'application de cette méthode, et les résultats sont comparés à ceux de la cuve et du papier conducteur. Le nombre d'approximations de la surface libre est le même qu'avec les autres méthodes (papier conducteur ou conductances de bordure) et la concordance des résultats est très satisfaisante.

Dans le cas d'un massif isotrope, le calcul des injections se fait très rapidement à l'aide des abaques du chapitre III (planches III₇ et III₈).

B. — TECHNIQUE DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES

1. — Le réseau.

La nécessité de modifier souvent les conductances du réseau au cours de la recherche de la surface libre, l'intérêt de monter rapidement n'importe quel type de modèle et d'en modifier aisément certaines parties au cours de l'expérience (longueur

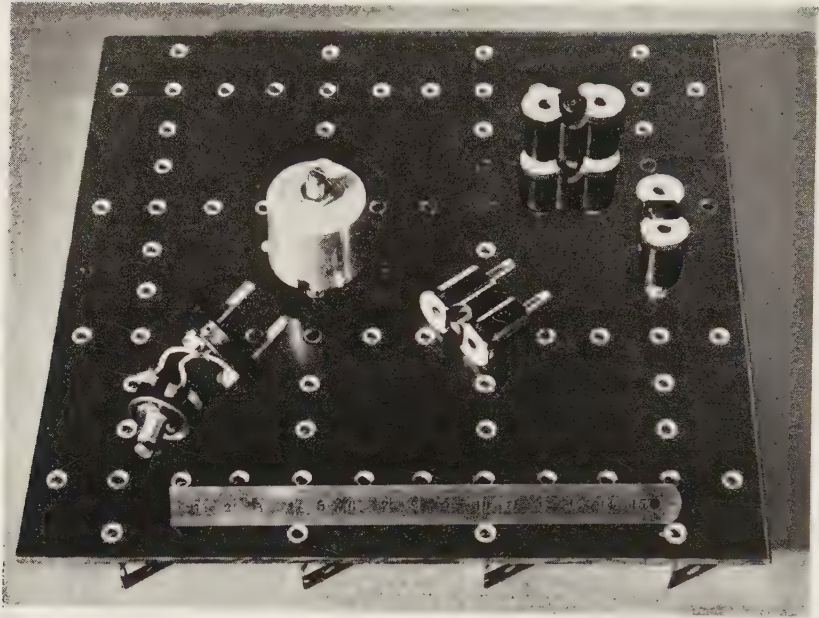


Fig. 44

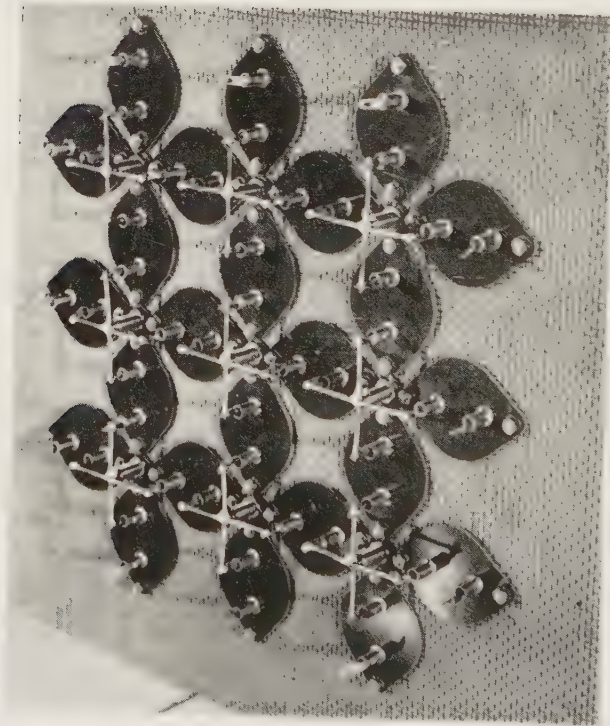


Fig. 45

d'un drain ou d'une palplanche, par exemple) m'ont conduit à réaliser, en 1952, un réseau à conductances amovibles de construction relativement simple (réf. [7]). Cet ensemble se compose principalement :

— d'un stock de résistances (type miniature, $1/4$ W, précision 0,5 %) dont la gamme des valeurs, s'étendant de $1\ \Omega$ à $10\ M\Omega$, permet d'envisager n'importe quel type de modèle analogique. Chaque résistance est logée dans une fiche de prise de courant, d'écartement standard de 19 mm. On peut réaliser de nombreuses combinaisons de valeurs en branchant deux résistances ou davantage les unes sur les autres, ce qui a pour effet de les mettre en parallèle. Enfin, on utilise également des résistances réglables, montées sur fiches, que l'on doit étalonner au préalable à l'aide d'un tournevis (voir *fig. 44*);

— de panneaux isolants portant les nœuds du réseau. Chaque nœud est matérialisé par une douille en laiton (permettant l'introduction d'une fiche banane pour relever le potentiel ou injecter une intensité). Entre deux nœuds successifs, est placée une prise de courant dont une borne est reliée à un nœud et l'autre borne à l'autre nœud (voir *fig. 45*). Ces prises de courant permettent de connecter deux à deux les nœuds du panneau à l'aide des conductances choisies dans le stock, et de monter ainsi rapidement le modèle analogique.

La disposition choisie pour les nœuds forme sur les panneaux un quadrillage régulier, ce qui permet de réaliser un réseau à mailles rectangulaires, égales ou non. Il a été construit initialement six panneaux carrés de deux cent vingt-cinq mailles chacun. Ces panneaux, amovibles, peuvent être juxtaposés pour constituer de grandes surfaces de formes quelconques (voir *fig. 46* et *47*). Par la suite, il a été construit au laboratoire des panneaux plus grands de six cents mailles. Sur les côtés des panneaux, des broches à prises multiples permettent de connecter rapidement tous les nœuds d'un panneau aux nœuds correspondants d'un autre panneau, par l'intermédiaire de conductances de liaison portées par un panneau spécial (panneau de liaison). Cet ensemble, dont la description est donnée au chapitre III, permet de construire des modèles analogiques tridimensionnels.

2. — Alimentation du réseau.

a) MONTAGE SANS INJECTIONS.

Il s'agit d'imposer uniquement des potentiels. L'appareillage d'alimentation est le même que celui décrit au chapitre premier, relatif aux modèles en papier conducteur, les conductances employées n'étant ni selfiques, ni capacitives. On peut employer du courant sinusoïdal, obtenu à l'aide d'un générateur basse fréquence à lampes de type classique, avec, si besoin est, le concours d'un amplificateur de puissance. La fréquence employée habituellement varie de 50 à 1 000 périodes par seconde. Ce mode d'alimentation est le plus courant, car il permet l'emploi d'oscilloscopes comme lecteurs de zéro. Ces appareils travaillant en figures de LISSAJOUS (voir, à ce sujet, réf. [5] du chap. premier), ne présentent pas les deux principaux défauts des galvanomètres à courant continu : inertie et risque de détérioration par surcharge brusque.

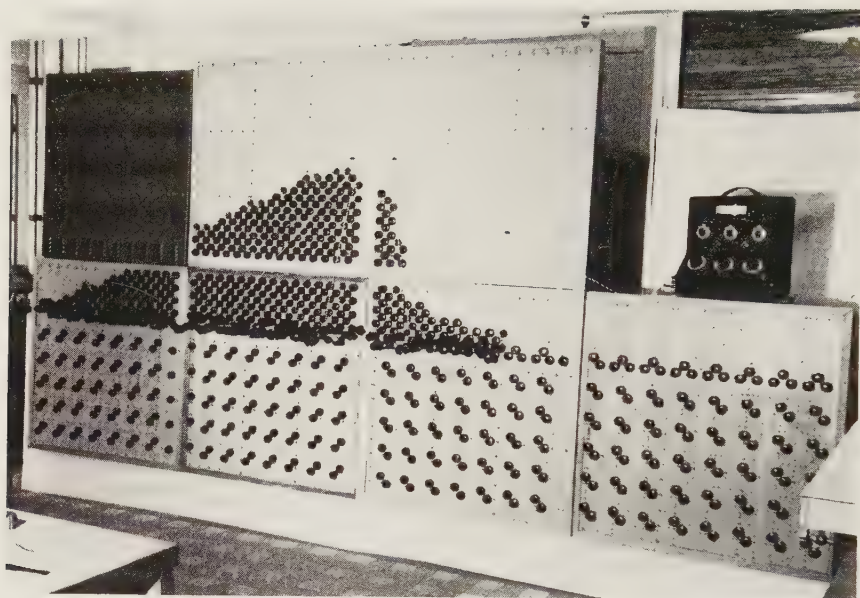


Fig. 46

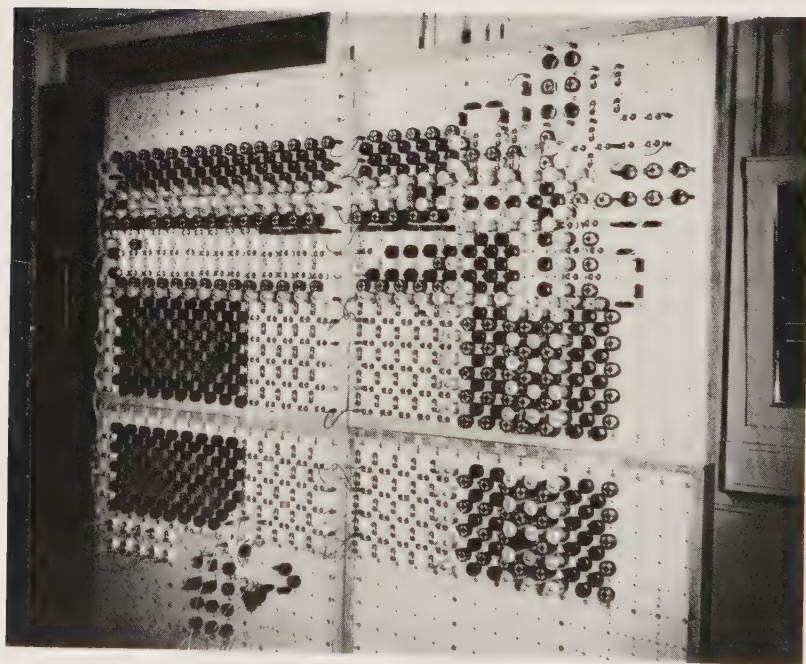


Fig. 47

b) MONTAGE AVEC INJECTIONS.

Les intensités sont injectées par la méthode classique des grandes résistances. Le montage utilisé est représenté *figure 48*. La tension fournie par le générateur étant appliquée aux bornes A et B, on appelle arbitrairement + 100 et — 100 les tensions respectives de ces bornes. En réglant les résistances R_1 et R_2 , on amène les potentiels extrêmes du modèle analogique aux valeurs + 0,5 et — 0,5, ce qui se vérifie avec les ponts de mesure P_1 et P_2 et les lecteurs de zéro, O_1 et O_2 . Il n'est pas indispensable de

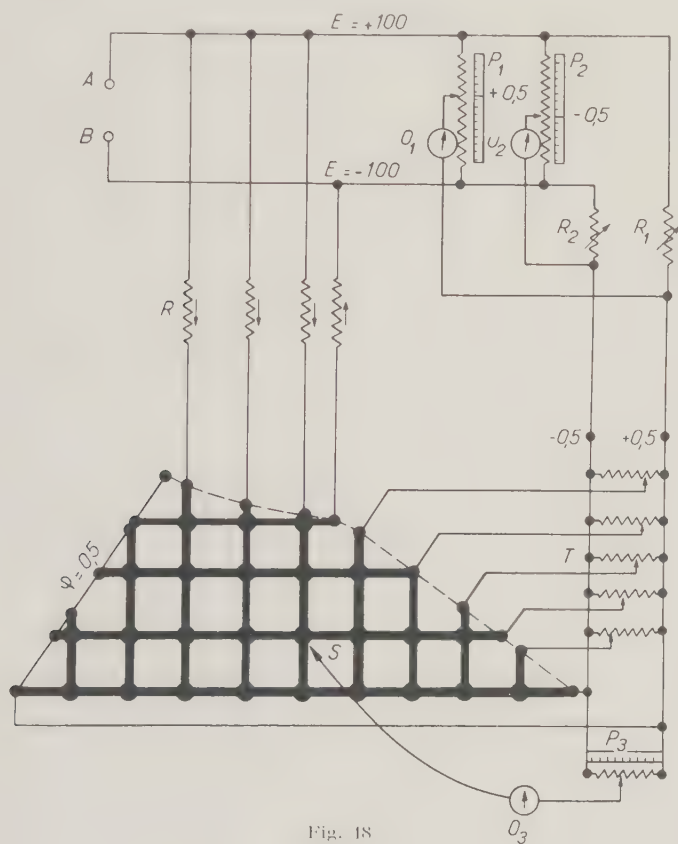


Fig. 48

faire ces réglages simultanément, aussi peut-on n'utiliser qu'un seul lecteur de zéro, en le connectant différemment suivant les besoins.

On simplifie notablement le réglage des potentiels 0,5 et — 0,5 en shuntant respectivement R_1 , le modèle, et R_2 par des résistances très faibles, et dont les valeurs relatives sont 99,5, 1, et 99,5.

Les nœuds où l'on injecte sont reliés aux tensions + 100 ou — 100 (selon le signe de l'intensité I à injecter) par l'intermédiaire de grandes résistances R , telles que :

$$I = \frac{100}{R}.$$

L'intensité injectée, qui vaut en réalité :

$$I' = \frac{100 - \varphi}{R} \quad \left(\text{ou} \quad \frac{100 + \varphi}{R} \right),$$

φ étant le potentiel du nœud considéré, est donc imposée à 0,5 % près, car φ est toujours inférieur à 0,5. Cette précision est suffisante, car les résistances R , pratiquement de l'ordre de 100 000 ohms à plusieurs mégohms, ne sont définies qu'à 1 ou 2 % près. D'autre part, on sait qu'une variation notable (en valeur relative) de l'intensité injectée dans un réseau ne provoque qu'une variation beaucoup plus faible des potentiels du réseau.

L'imposition des potentiels connus (condition de DIRICHLET) se fait à l'aide d'un tableau de potentiomètres T , branchés en parallèle entre les tensions $+ 0,5$ et $- 0,5$. La lecture des potentiels des nœuds du réseau se fait à l'aide du pont de mesure P_3 (branché entre 0,5 et $- 0,5$) et un lecteur de zéro O_3 (*fig. 48*).

L'intervalle ($- 0,5$, $+ 0,5$) des potentiels du modèle ne représente que $1/200$ de la tension fournie par le générateur entre les bornes A et B. Si l'on désire lire le dix-millième de l'échelle ($- 0,5$, $+ 0,5$), il nous faut un lecteur de zéro sensible à $0,5 \cdot 10^6$ de la tension du générateur. C'est pourquoi, dans les montages avec injection, on n'utilise généralement que du courant alternatif, permettant d'amplifier facilement la tension à détecter.

MODÈLES ANALOGIQUES A TROIS DIMENSIONS

I. — Position du problème

Si, théoriquement, les analogies électriques s'appliquent aussi bien aux problèmes de filtration tridimensionnels qu'aux problèmes plans, la réalisation des modèles analogiques à trois dimensions et leur exploitation présentent quelques difficultés. En ce qui concerne les milieux perméables homogènes, on ne peut plus employer le papier conducteur. Il nous faut construire le modèle analogique à l'aide d'un matériau conducteur, possédant un ensemble de qualités que l'on trouve rarement réunies dans les produits courants. Ces qualités sont les suivantes :

— *qualités mécaniques* :

— facilement moulable;

— facile à travailler (pour l'ajustage de la surface libre) par grattage ou par fraisage;

— *qualités électriques* :

— conducteur de l'électricité;

— résistivité comprise entre 10^2 ω -cm et 10^6 ω -cm environ;

— homogénéité et isotropie de la résistivité, avec une tolérance de l'ordre de quelques pour cent;

— constance de la résistivité et possibilité de la mesurer.

Un tel matériau solide présente un inconvénient, celui de ne pas permettre un relevé continu du potentiel à l'intérieur du modèle. Il faut disposer à l'avance, avant la coulée du modèle, un grand nombre de sondes électriques ponctuelles, reliées à des bornes extérieures par des fils fins isolés; le potentiel n'est connu qu'en un certain nombre de points choisis, comme dans un réseau à trois dimensions.

Un modèle analogique utilisant un liquide conducteur (cuve rhéoelectrique) permet théoriquement l'exploration continue du potentiel à l'aide d'une sonde ponctuelle que l'on déplace dans le liquide; mais il faut relier cette sonde à l'extérieur par un dispositif mécanique, afin de pouvoir la déplacer et repérer sa position, ce qui n'est possible, pratiquement, que si le modèle est limité par une paroi plane isolante, qui est

alors représentée par la surface libre du liquide de la cuve. Dans le cas général (pas de paroi plane isolante de dimensions suffisantes), le modèle est fermé de toutes parts et l'exploration continue n'est plus possible.

L'utilisation des réseaux permet la réalisation de modèles tridimensionnels, anisotropes, hétérogènes ou zonés, avec relevé du potentiel aux nœuds. Pratiquement, le modèle doit être limité par des parois imperméables de formes géométriques assez simples, afin de ne pas trop compliquer le calcul des résistances du réseau. Quant à la surface libre, sa recherche et sa représentation se font aisément par des injections, en utilisant une méthode semblable à celle décrite au chapitre II.

Les paragraphes qui suivent sont consacrés à la description de deux méthodes que j'ai mises au point, l'une utilisant le plâtre à modeler, qui est conducteur lorsqu'il est frais, l'autre utilisant les réseaux avec injections sur la surface libre. Une troisième partie décrit la méthode utilisée à la cuve pour vérifier les résultats obtenus à l'aide du plâtre et des réseaux.

II. — Réalisation des modèles analogiques

A. — UTILISATION DU PLÂTRE

Le plâtre gâché à l'eau et encore frais est très bon conducteur de l'électricité. Les qualités de ce matériau pour le moulage (rapidité de prise, gonflement), sa rigidité une fois pris tout en restant facile à travailler, ainsi que son bas prix de revient, m'ont conduit à l'utiliser pour la confection de modèles analogiques.

1. — Propriétés électriques du plâtre — Essais sur échantillons.

J'ai tout d'abord fait des essais sur sa conductibilité en confectionnant des barreaux de sections carrées. A chaque extrémité des barreaux était noyée une électrode en laiton (*fig. 49*), composée soit d'une plaque perforée de nombreux trous, soit d'une toile métallique (cette dernière solution étant préférable pour assurer un bon contact électrique avec le plâtre).

Les dimensions des barreaux étaient de 5 cm $\times$ 5 cm pour la section et de 25 cm de longueur entre électrodes, de sorte que la résistance mesurée pour le barreau donnait directement la valeur de la résistivité du plâtre.

Le courant employé était sinusoïdal à 1 000 par seconde, le courant continu créant des effets de polarisation trop importants; l'appareillage d'alimentation et de mesure est donc le même pour le plâtre que pour la cuve.

Entre les bornes 0 et 100 du générateur étaient placés en série le barreau de plâtre et une résistance R variable à décades (*fig. 49*). La résistance était réglée de façon à porter le potentiel du point commun au barreau et à la résistance à 50. La valeur lue de R était alors la résistance du barreau entre ses électrodes.

Homogénéité.

Le potentiel était relevé tous les 5 cm, le long du barreau, à l'aide d'une sonde composée d'une mine de crayon (un stylomine métallique fait très bien l'affaire). L'erreur du pointé était de 0,5 mm au maximum. Les différences de potentiels mesurées entre deux sections distantes de 5 cm, théoriquement égales à 10, ont donné une dispersion de l'ordre de 0,05, soit 0,5 % en valeur relative, ce qui correspond, du reste, à la précision du pointé. L'homogénéité des barreaux était donc excellente.

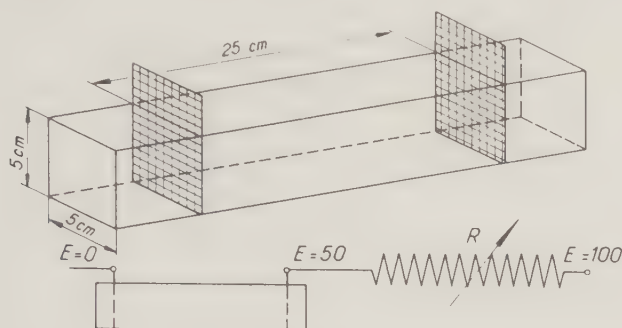


Fig. 49

Résistance de contact des électrodes.

Le relevé des potentiels des sections $x = 5, 10, 15$ et 20 cm (fig. 50) donne une courbe (théoriquement droite) que l'on peut extrapoler de part et d'autre jusqu'aux sections $x = 0$ et $x = 25$ cm; les écarts respectifs des potentiels ainsi trouvés, par rapport aux potentiels 0 et 50 des électrodes, donnent les chutes de tension ϑE dues aux résistances de contact plâtre-électrodes. Pratiquement, il est préférable d'exprimer l'épaisseur de plâtre ε correspondant à la chute ϑE (fig. 50).

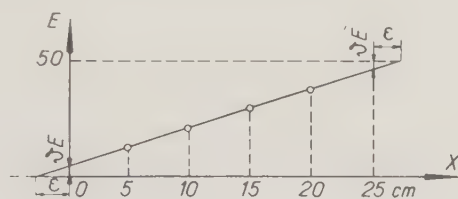


Fig. 50

Les valeurs trouvées pour ε variaient de 1 à 3 mm pour des électrodes constituées de plaques perforées (trous de 7 mm de diamètre, entraxes de 10 mm). En utilisant de la toile métallique en fil de laiton, ε n'était plus décelable.

Variation de la résistance en fonction du temps.

La résistance du plâtre frais varie beaucoup avec son degré d'humidité. Le plâtre utilisé, gâché dans les proportions de 1 kg de plâtre pour 750 cm³ d'eau, avait une résistivité ρ de l'ordre de 1 000 ω -cm deux heures après sa prise, et de 17 000 ω -cm six jours après. La figure 51 indique l'allure de la variation de ρ pour un barreau non verni, présentant une grande surface d'évaporation (dimensions du barreau : 5 $\times$ 5 $\times$ 25 cm).

Par contre, des essais sur barreau verni ont donné une variation de ρ de 2 000 à 2 900 ω -cm seulement pour une durée de neuf jours, avec une variation sensiblement linéaire de 100 ω -cm par jour; la résistivité variait, dans ce cas, d'environ 1 % en cinq heures.

Il résulte de ces essais qu'on ne peut prévoir la résistivité d'un modèle analogique en plâtre, la valeur de ρ dépendant essentiellement du temps écoulé depuis la prise du plâtre. Néanmoins, avec un modèle suffisamment protégé contre l'évaporation, la résistivité reste suffisamment stable durant l'expérience. C'est le cas des modèles coulés dans un moule imperméable; seule, la surface libre reste à découvert, au cours de sa détermination par grattage. Nous verrons plus loin que l'humidité reste bien répartie dans un tel modèle.

La mesure de ρ au cours de l'expérience peut se faire à l'aide d'une cellule de dimensions connues, noyée dans le modèle et reliée à l'extérieur par deux fils isolés. La description d'un tel procédé est donnée plus loin, page 68.

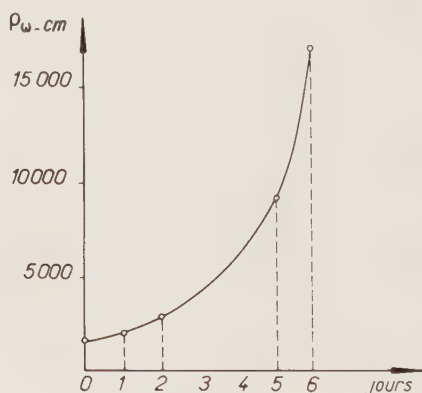


Fig. 51

Résistance de contact plâtre-plâtre.

Il peut être intéressant, parfois, de couler un modèle en deux ou plusieurs fois. Les surfaces de raccordement des différentes coulées présentent alors des chutes de potentiel dues à des résistances de contact plâtre-plâtre. Des essais sur raccordements de barreaux de plâtre ont donné des résistances de contact correspondant à des épaisseurs de plâtre de 6 mm environ.

On peut donc couler des modèles en plusieurs fois si les surfaces de raccordement ne se trouvent pas dans des zones de gradients importants, et si les dimensions du modèle sont suffisantes.

2. — Confection et utilisation des modèles analogiques.

Le plâtre.

Avant la coulée, il doit être bien liquide et très homogène, sans grumeaux; le procédé classique consiste à le verser en pluie fine sur toute la surface de l'eau, en totalité, puis à brasser le liquide dans toute sa masse. La proportion de 1 kg de plâtre pour

750 cm³ d'eau donne de bons résultats (plâtre bien liquide avant la prise et suffisamment consistant après), avec de larges tolérances.

Une fois coulé, le plâtre doit être remué dans le moule avec une palette afin d'être toujours homogène.

Le moule.

Il peut être fabriqué en contre-plaqué, verni intérieurement si le modèle est limité par des faces planes. Sinon, des moules en matériaux isolants, tels que les matières plastiques renforcées de fibres de verre, conviennent très bien; on peut laisser le modèle dans son moule lors des mesures électriques.

Les électrodes.

Le moule est au préalable tapissé de toile métallique en laiton sur les parties équipotentielles (parement amont d'un barrage, par exemple, drains, etc.). Ces électrodes doivent pouvoir être alimentées électriquement de l'extérieur du moule.

Les sondes ponctuelles.

Afin de connaître la répartition du potentiel à l'intérieur du plâtre, des fils fins isolés sont répartis dans le moule. Leurs extrémités sont seules dénudées et portent une gouttelette de soudure, ou mieux une perle de laiton soudée (diamètre 2 à 3 mm) pour assurer un bon contact avec le plâtre. Ces fils doivent être très fins pour ne pas perturber le champ électrique : leur diamètre, isolant compris, ne dépasse pas 1 mm. Ces sondes sont accrochées après des fils isolants tendus à travers le moule. On peut ainsi répartir un grand nombre de sondes ponctuelles dans tout le modèle (à titre d'exemple, le modèle représenté *figure 53* en comporte soixante). Les extrémités des fils ressortant à l'extérieur sont repérées et permettent ainsi la mesure du potentiel aux points correspondants.

Détermination de la surface libre.

Le procédé est analogue à celui utilisé pour les problèmes plans, avec le papier conducteur. Il s'agit ici de surface au lieu de lignes.

On se donne arbitrairement une surface libre, nettement au-dessus de la solution, et l'on cherche à déterminer la surface lieu des points où l'on a $\varphi - z = 0$, z étant la cote du point considéré. Cette surface se trouve à l'intérieur du modèle, et on la détermine en interpolant le potentiel entre les valeurs relevées sur la surface du modèle et celles des sondes noyées à l'intérieur (on interpole linéairement pour les premières approximations). La surface médiane, entre la surface du modèle et la surface $\varphi - z = 0$ trouvée, nous donne l'approximation suivante que l'on réalise en grattant le plâtre.

Lorsque l'on approche de la solution, la simple valeur de $\varphi - z$ relevée sur la surface du modèle suffit pour conduire l'ajustage de cette surface.

On peut également utiliser une petite fraise verticale montée sur double chariot, pouvant se déplacer dans deux directions rectangulaires horizontales, ainsi que dans le sens vertical, à l'aide d'une crémaillère (système porte-sonde des cuves rhéoelectriques à trois dimensions) (réf. [5] du chap. premier). On peut ainsi tracer des lignes de niveau de cote z sur la surface du modèle, mesurer la valeur de $\varphi - z$ en différents points, puis

percer dans le plâtre des puits fins et verticaux en ces points. La profondeur des puits est déterminée de façon que le potentiel φ_1 relevé au fond du puits (de cote z_1) soit tel que $\varphi_1 - z_1 = \frac{1}{2}(\varphi_0 - z_0)$, φ_0 et z_0 étant respectivement le potentiel et la cote de l'orifice du puits. En supposant que φ varie linéairement, le fond du puits est situé au milieu de l'orifice et de la surface $\varphi - z = 0$.

On utilise de nouveau la fraise pour abaisser la surface du plâtre, jusqu'à ce que les traces des puits disparaissent. On recommence alors à partir de cette nouvelle itération.

Mesure du débit.

La mesure du débit traversant un modèle analogue se fait de la même façon à trois dimensions qu'à deux : il nous faut connaître la résistance électrique R du modèle et la résistivité ρ du milieu conducteur. Comme dans les expériences avec papier conducteur, la mesure de ρ revient à mesurer la résistance d'un échantillon de dimensions géométriques connues.

Pour cela, on peut noyer dans le modèle deux disques en clinquant de laiton, d'aires s , collés chacun sur une plaquette isolante, et se faisant vis-à-vis, à une distance connue (*fig. 54*). Autour des disques, ainsi que sur les faces extérieures des plaquettes, est également collé du clinquant formant électrodes de garde. Les disques sont reliés par des fils isolés aux bornes extérieures A et A' et les électrodes de garde aux bornes B et B' .

L'ensemble est disposé dans une région du modèle où le champ est sensiblement uniforme et de direction connue, de façon que les plaquettes soient parallèles aux surfaces équipotentielles.

Au cours de l'expérience portant sur le modèle analogue, les bornes A et B , d'une part, et A' et B' , d'autre part, sont court-circuitées entre elles sans être alimentées; le dispositif ainsi noyé dans le plâtre ne perturbe pas beaucoup l'écoulement, car il ne fait que matérialiser deux portions de surfaces équipotentielles.

Pour la mesure de ρ , on cesse d'alimenter le modèle analogue et l'on déconnecte les bornes A' et B' . A et B sont portées à 0 et B' à 50. La borne A' est reliée à 100 par l'intermédiaire d'une résistance r réglable à décades, et l'on ajuste r pour amener A' à 50. On a alors :

$$\rho = \frac{r}{s} r,$$

l'écoulement électrique entre les deux disques étant uniforme grâce aux électrodes de garde.

3. — Essais à deux dimensions.

J'ai tout d'abord utilisé le plâtre pour des modèles simples à deux dimensions afin de pouvoir comparer avec les résultats des méthodes des chapitres premier et II. La *figure 52* représente un exemple de modèle en plâtre relatif à un barrage perméable isotrope reposant sur un sous-sol de même perméabilité. Les dimensions extrêmes sont de 66×24 cm et l'épaisseur de 5 cm. Les résultats obtenus (position de la surface

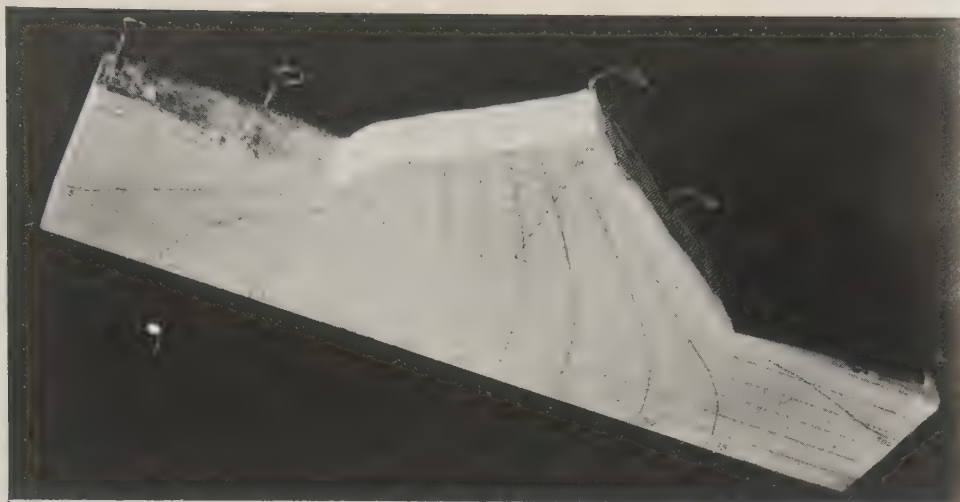


Fig. 52

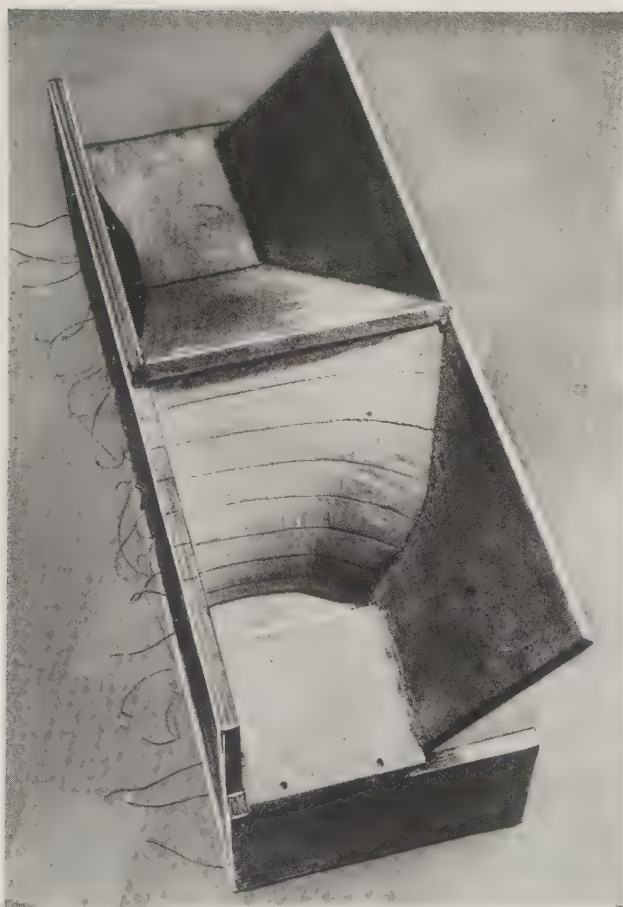


Fig. 53

libre et des équipotentiellés) sont comparés sur la planche III₁ aux résultats de la cuve, du papier et des réseaux. Les erreurs maximums sur les potentiels mesurés sont de l'ordre de 1 à 2 % par rapport à la cuve. La position de la surface libre obtenue au plâtre est excellente (écart maximum de l'ordre de 3 % de la hauteur de charge).

4. — Essais à trois dimensions.

A titre d'exemple, la *figure 53* représente un modèle de barrage en terre, isotrope, placé en travers d'une vallée en forme de dièdre rectangle. Cette vallée a des pentes supposées imperméables, et son fond est rempli d'alluvions de même perméabilité que le barrage. La hauteur du bassin retenu est égale à l'épaisseur d'alluvions. Un tapis drainant horizontal est placé au pied aval du barrage, au niveau du sol (*fig. 55*).

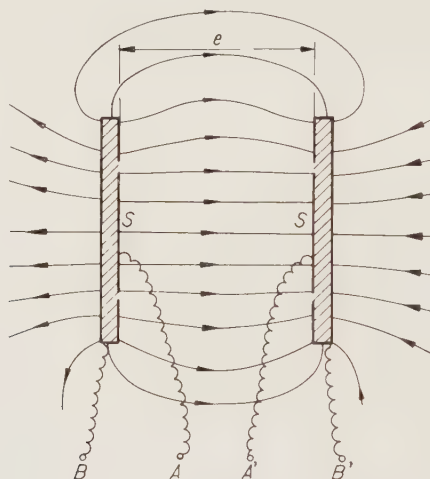


Fig. 51

Le modèle a 66 cm de long, et 24 cm de hauteur. Il est réduit à la moitié du barrage par raison de symétrie.

Le relevé du potentiel à l'intérieur du plâtre se fait grâce à soixante sondes noyées.

L'ajustement de la surface libre a été arrêté lorsque la valeur de $\varphi - z$ était inférieure à 1 (échelle 0-100 du potentiel et des cotes) en tout point de la surface, les quantités de plâtre à retirer devenant trop minimes.

Les résultats obtenus avec ce modèle sont comparés aux résultats de la cuve à trois dimensions sur les planches III₃ à III₆. On voit qu'ils sont très satisfaisants. Les écarts maximums sur la position de la surface libre se produisent principalement au voisinage du drain aval. En cette région, il est toujours délicat (quelle que soit la méthode employée, cuve ou plâtre) de situer exactement cette surface par suite du fort gradient de l'écoulement (l'électrode représentant le drain débite un courant électrique de forte densité et la moindre résistance de contact entre l'électrode et le conducteur crée une chute de potentiel appréciable, déplaçant les équipotentiellés).

Les mesures de débit ont donné $\rho/RH = 0,60$ au lieu de 0,69 à la cuve, soit un écart de 13 %. La valeur prise pour ρ est la moyenne des résultats donnés par deux cellules noyées dans le modèle, de $4,5 \text{ cm}^2$ de section et de 5 cm de long. Les deux valeurs trouvées pour ρ s'écartent de $\pm 6 \%$ par rapport à la valeur moyenne. Cette dispersion est due en partie aux faibles dimensions des cellules, qui doivent être petites pour ne pas perturber l'écoulement électrique dans le modèle.

On peut se demander si le fait qu'une partie du modèle soit à découvert (en l'occurrence la surface libre) et le reste protégé par le moule contre l'évaporation, n'entraîne pas une différence de teneur d'eau dans les différentes régions du plâtre et, par suite, des différences de résistivité. Il n'en est rien, la capillarité répartissant assez rapidement l'humidité à travers le modèle. En prenant le potentiel d'un point situé à 2 cm de la surface libre (sonde noyée), le fait d'imbiber copieusement, à l'aide d'une

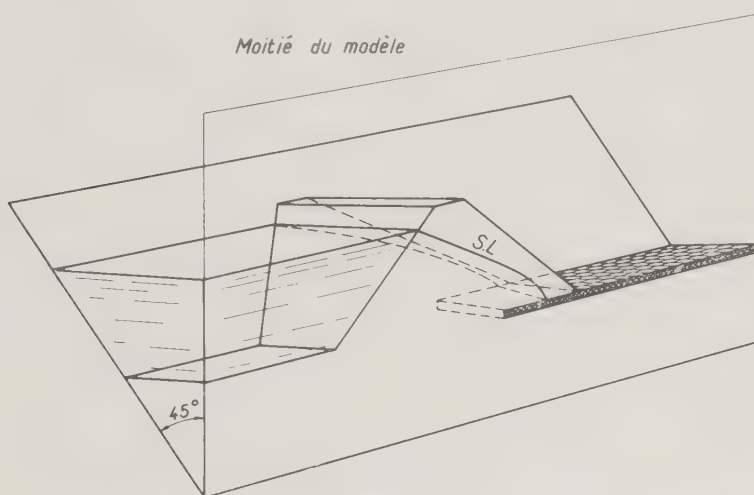


Fig. 55

éponge, la surface libre, fait varier rapidement ce potentiel (déviations de l'ordre de quelques millièmes de l'échelle totale) qui reprend néanmoins sa valeur initiale au bout de quelques secondes.

D'autre part, les valeurs du potentiel relevées dans le modèle n'avaient pas varié sensiblement une semaine après l'expérience.

5. — Conclusions.

L'utilisation du plâtre dans la confection des modèles analogiques à trois dimensions peut être d'un grand intérêt pour le dégrossissage rapide des problèmes, étant donné sa facilité d'emploi et les résultats qu'il permet d'obtenir. Si sa précision est limitée, elle semble devoir satisfaire les exigences des problèmes pratiques d'infiltrations.

Il serait intéressant, néanmoins, de pouvoir stabiliser la résistivité du plâtre et de pouvoir agir sur sa valeur (par incorporation de graphite ou de poudre isolante, par

exemple). On pourrait alors étudier des massifs possédant des zones de différentes perméabilités, les zones étant moulées séparément les unes sur les autres. Nous verrons plus loin qu'actuellement, ces problèmes se résolvent à l'aide des réseaux.

B. UTILISATION DES RÉSEAUX TRIDIMENSIONNELS

Nous avons vu, au chapitre II (p. 29), que l'on peut construire des réseaux de conductances à trois dimensions pour résoudre l'équation :

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0,$$

dans laquelle λ , μ , ν sont des fonctions connues de x , y , z . Les nœuds du réseau sont alignés suivant les trois directions Ox , Oy , Oz . Les mailles forment des parallélépipèdes rectangles qui peuvent être inégaux et imposés à l'avance.

Étant donné une croix à branches inégales (*fig. 56*) (l'expression « croix » devient impropre à trois dimensions, mais nous l'utilisons par raison de continuité vis-à-vis des réseaux à deux dimensions), les valeurs des conductances sont données par les équations :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = C \cdot \frac{(\beta' + \beta)(\gamma' + \gamma)}{2\alpha} \lambda_{0,1}, \\ C_2 = C \cdot \frac{(\gamma' + \gamma)(\alpha' + \alpha)}{2\beta} \mu_{0,2}, \\ C_3 = C \cdot \frac{(\beta' + \beta)(\gamma' + \gamma)}{2\alpha'} \lambda_{0,3}, \\ C_4 = C \cdot \frac{(\gamma' + \gamma)(\alpha' + \alpha)}{2\beta'} \mu_{0,4}, \\ C_5 = C \cdot \frac{(\alpha' + \alpha)(\beta' + \beta)}{2\gamma'} \nu_{0,5}, \\ C_6 = C \cdot \frac{(\alpha' + \alpha)(\beta' + \beta)}{2\gamma} \nu_{0,6}, \end{array} \right.$$

où $\lambda_{0,i}$, $\mu_{0,i}$, $\nu_{0,i}$ sont les valeurs respectives de λ , μ et ν au milieu des segments $(0, i)$ considérés, et C une constante commune à tous les nœuds du réseau (dans ce qui suit, nous la prendrons égale à 1).

A l'intérieur du réseau, les conductances calculées à l'aide des équations (2) sont déterminées d'une façon unique, bien qu'elles aboutissent à deux croix différentes, et qu'elles doivent, par suite, satisfaire à deux systèmes (2) différents. Il n'en est pas de même au voisinage de la frontière du domaine quand celle-ci est une surface quelconque coupant les mailles. De plus, la réalisation des conditions aux limites présente quelques difficultés, ainsi que dans les problèmes plans.

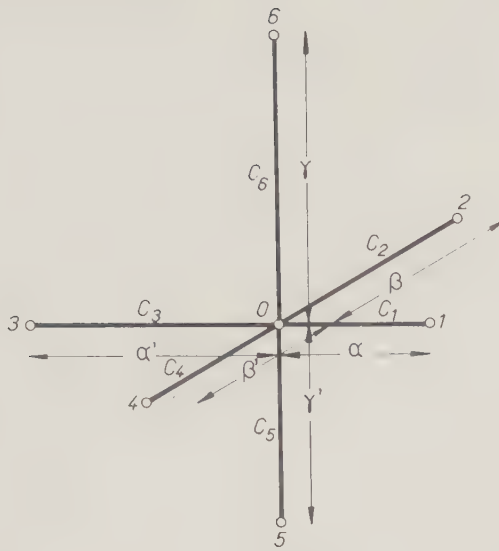


Fig. 56

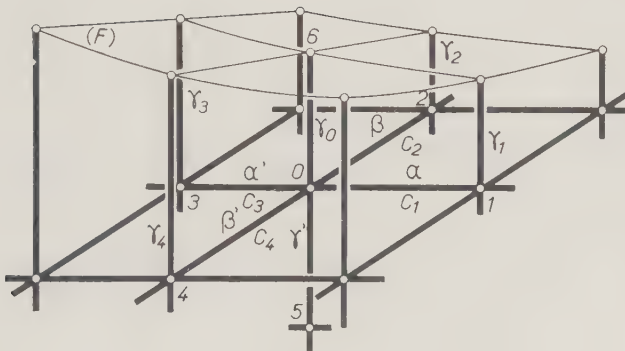


Fig. 57

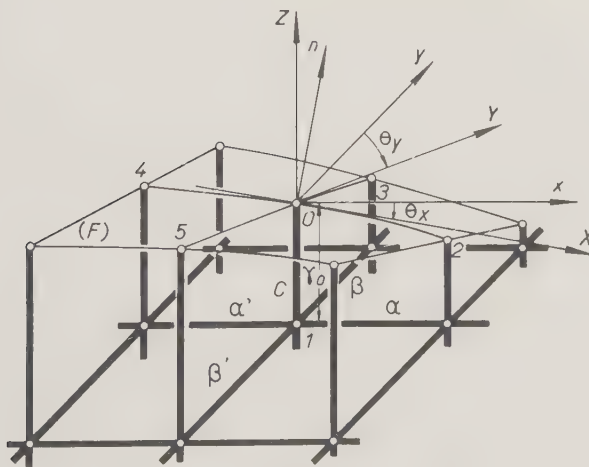


Fig. 58

1. — Imposition des conditions aux limites.

a) FRONTIÈRES OU LE POTENTIEL EST CONNU.

Il s'agit d'une condition du type de DIRICHLET : c'est le cas, par exemple, du parement amont d'un barrage, d'une surface de suintement, d'un drain, etc.

Les potentiels connus étant imposés sur la frontière (F) aux extrémités des conductances y aboutissant, le calcul des conductances C_1 , C_2 , C_3 et C_4 , joignant respectivement le nœud 0 aux nœuds 1, 2, 3 et 4 (*fig. 57*), donne des valeurs différentes suivant que l'on écrit les équations (2) en 0 ou aux points 1, 2, 3 ou 4, du fait que les brins coupés issus de 1, 2, 3 et 4 ne sont pas égaux à γ_0 (longueur $\overline{06}$). Nous avons déjà rencontré un problème semblable dans le cas des réseaux bidimensionnels, et la solution exposée au chapitre II s'applique ici sans difficulté : les conductances telles que C_1 , C_2 , C_3 , et C_4 sont calculées en supposant tous les brins coupés parallèles égaux à une longueur commune γ . L'hypothèse nécessaire pour justifier cette méthode est, comme pour les réseaux plans, que les dérivées secondes de φ le long des brins coupés sont négligeables. Les erreurs ainsi apportées sont faibles. Aussi, ce procédé est-il communément utilisé.

b) FRONTIÈRES LIGNES DE COURANT.

α) Frontière imperméable connue.

Le vecteur vitesse V , de composantes $\lambda \varphi'_x$, $\mu \varphi'_y$ et $\nu \varphi'_z$, est tangent à la frontière (F), ce qui s'écrit :

$$(3) \quad V \cdot n = 0,$$

n étant un vecteur normal à (F) au point considéré.

Considérons un réseau coupé par une telle surface (F), comme l'indique la *figure 58*. Les lignes de nœuds du réseau étant orientées suivant x , y et z , appelons X et Y les directions portées par les tangentes en 0 à (F) et contenues dans les plans (x, z) et (y, z) , avec :

$$\theta_x = (x, X) \quad \text{et} \quad \theta_y = (y, Y).$$

La conductance C reliant 1 à 0 est parcourue par une intensité :

$$I = (\varphi_0 - \varphi_1) \cdot C.$$

Cherchons à déterminer I pour alimenter la conductance C . La valeur de C , pour satisfaire aux équations (2) écrites au nœud 1, doit être prise égale à :

$$\nu_{0,1} (\alpha' + \alpha) (\beta' + \beta) / 4 \gamma_0.$$

Par suite :

$$(1) \quad I = \frac{(\alpha' + \alpha) (\beta' + \beta)}{4} \cdot \nu_{0,1} \cdot \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\gamma_0} \simeq \frac{(\alpha' + \alpha) (\beta' + \beta)}{4} \cdot \nu_{0,1} \cdot \varphi'_z.$$

Or, on vérifie facilement que la condition (3) s'écrit :

$$(5) \quad \nu_0 \cdot \varphi'_z = \lambda_0 \operatorname{tg} \theta_x \cdot \varphi'_x + \mu_0 \operatorname{tg} \theta_y \cdot \varphi'_y \\ \lambda_0 \operatorname{tg} \theta_x (\varphi'_x / \cos \theta_x + \varphi'_z \cdot \operatorname{tg} \theta_x) + \mu_0 \operatorname{tg} \theta_y (\varphi'_y / \cos \theta_y + \varphi'_z \operatorname{tg} \theta_y).$$

Compte tenu de ce que :

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi'_x \simeq (\varphi_2 - \varphi_4)/4, 2 \simeq (\varphi_2 - \varphi_4) \cdot \cos \theta_x / (\alpha' + \alpha), \\ \varphi'_y \simeq (\varphi_3 - \varphi_5)/5, 3 \simeq (\varphi_3 - \varphi_5) \cdot \cos \theta_y / (\beta' + \beta), \end{cases}$$

on a enfin :

$$(7) \quad I \simeq 1 \left(\lambda_0 \lg^2 \theta_x + \mu_0 \lg^2 \theta_y + \nu_0 \right) \times [\lambda_0 \cdot \lg \theta_x (\beta' + \beta) (\varphi_2 - \varphi_4) + \mu_0 \cdot \lg \theta_y (\alpha' + \alpha) (\varphi_3 - \varphi_5)].$$

Dans l'expression (7), les valeurs des φ_i ne sont pas connues *a priori*, mais on peut régler les intensités I à injecter par itérations : on se donne arbitrairement les valeurs des I que l'on injecte, et l'on relève sur le réseau les potentiels φ_i qui en résultent. On

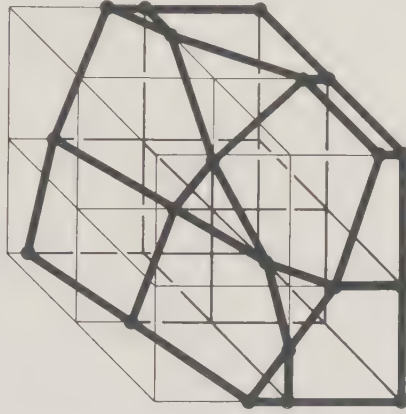


Fig. 59

porte ces valeurs φ_i dans les équations (7), ce qui détermine de nouvelles valeurs d'injections. Et l'on recommence.

On pourrait également, comme au chapitre II, chercher à réaliser automatiquement l'injection I , en connectant le nœud 0 aux nœuds voisins 2, 3, 4 et 5, par l'intermédiaire de conductances appropriées, ainsi qu'avec des diagonales dans les plans $(\bar{x}, \bar{z})$ et $(\bar{y}, \bar{z})$. Bien que cette solution soit possible, de telles connexions, dans le cas d'un réseau à trois dimensions, peuvent devenir assez compliquées (*fig. 59*) et difficiles à réaliser pratiquement en utilisant des réseaux à résistances amovibles.

Pratiquement, si la frontière imperméable (F) a une géométrie assez simple, on cherche à éviter ces injections en disposant les mailles inégales du réseau de telle façon que (F) ne passe que par des nœuds (cas de la *fig. 60*). Il n'y a plus, dans ce cas, de brins coupés. L'intensité I à injecter en un nœud tel que 0 (notations de la *fig. 60*), pour alimenter les trois conductances C_1, C_2, C_3 issues de ce nœud, a pour valeur :

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

avec :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1 &= C_1 (\varphi_0 - \varphi_1) \simeq \frac{(\alpha' + \alpha)(\beta' + \beta)}{4} \cdot \nu_{0,1} \varphi'_z, \\ I_2 &= C_2 (\varphi_0 - \varphi_2) \simeq -\frac{(\beta' + \beta)(\gamma' + \gamma)}{4} \cdot \lambda_{0,2} \varphi'_x, \\ I_3 &= C_3 (\varphi_0 - \varphi_3) \simeq -\frac{(\gamma' + \gamma)(\alpha' + \alpha)}{4} \cdot \mu_{0,3} \varphi'_y. \end{aligned} \right.$$

Par ailleurs, compte tenu de ce que :

$$\operatorname{tg} \theta_x \simeq \frac{\gamma + \gamma'}{\alpha + \alpha'} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \theta_y \simeq \frac{\gamma + \gamma'}{\beta + \beta'},$$

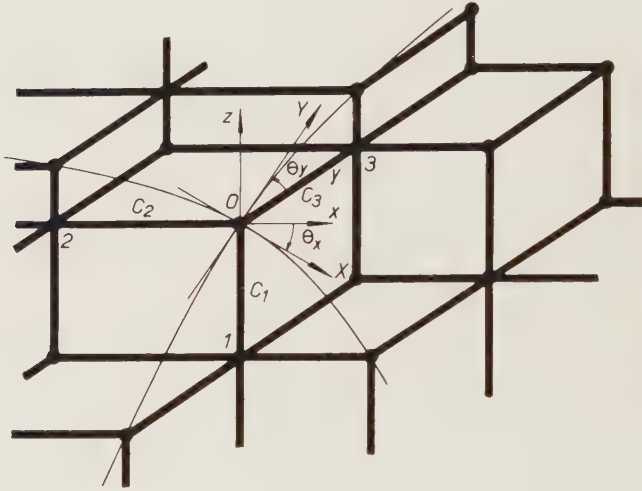


Fig. 60

l'égalité (5), exprimant que la frontière est imperméable, permet d'écrire :

$$(5') \quad \lambda_0 (\gamma' + \gamma) (\beta' + \beta) \varphi'_x + \mu_0 (\gamma' + \gamma) (\alpha' + \alpha) \varphi'_y - \nu_0 (\alpha' + \alpha) (\beta' + \beta) \varphi'_z = 0.$$

On a donc, finalement :

$$I \sim 0.$$

Il n'est plus besoin d'injecter sur la frontière.

β Cas de la surface libre.

La surface libre d'un écoulement est inconnue *a priori* et déterminée par approximations successives. Chacune de ces approximations est une surface imperméable connue, et, par suite, peut être représentée par l'une ou l'autre des deux méthodes précédentes. Néanmoins, la seconde méthode, consistant à disposer judicieusement les mailles inégales du réseau, demande un remaniement complet du réseau à chaque approximation de la surface libre : cette méthode est trop longue pratiquement. Par contre, la méthode par injections devient très intéressante si l'on remarque que sur la

surface libre les dérivées φ'_x , φ'_y et φ'_z sont connues et ne dépendent que de son inclinaison, c'est-à-dire de θ_x et θ_y . Par exemple, en milieu isotrope, on a :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi'_x = \frac{\operatorname{tg} \theta_x}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_x + \operatorname{tg}^2 \theta_y}, \\ \varphi'_y = \frac{\operatorname{tg} \theta_y}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_x + \operatorname{tg}^2 \theta_y}, \\ \varphi'_z = \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_x + \operatorname{tg}^2 \theta_y}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_x + \operatorname{tg}^2 \theta_y}. \end{array} \right.$$

$\bar{z}$ étant supposée verticale.

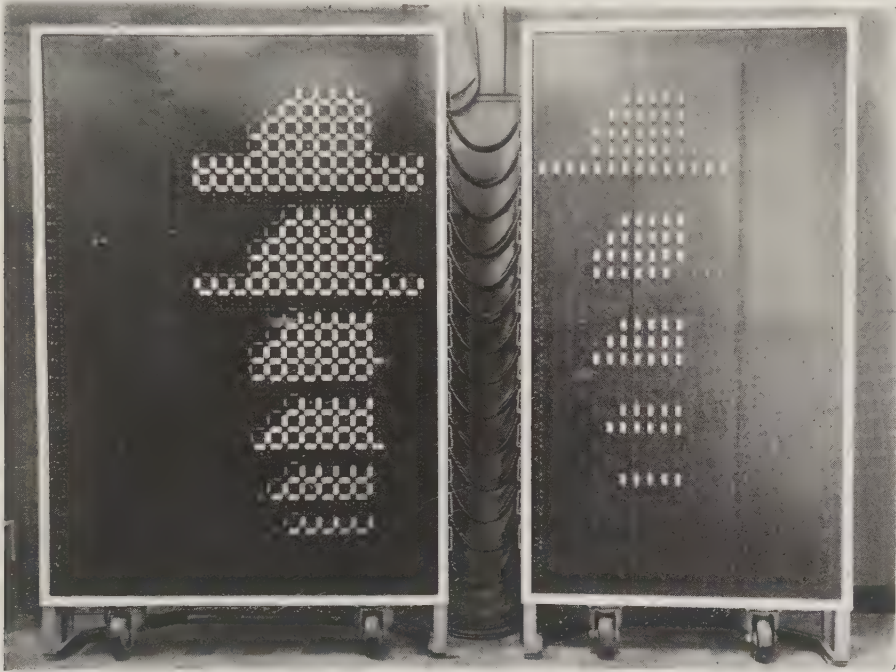


Fig. 61

L'intensité I à injecter dans un brin coupé, dont la conductance est C et la longueur l , est alors calculable et égale à $Cl \varphi'_x$, $Cl \varphi'_y$ ou $Cl \varphi'_z$, suivant que ce brin est dirigé selon x , y ou z .

Ce calcul des intensités n'est valable que pour la surface libre. On l'applique néanmoins pour chaque approximation, ce qui apporte une erreur dans les valeurs des intensités. Mais cette erreur tend vers zéro quand les approximations tendent vers la position exacte de la surface libre. La méthode converge rapidement (quatre ou cinq approximations suffisent). Le calcul des intensités peut souvent s'effectuer à l'aide d'abaques : à titre d'exemple, les planches III₇ et III₈ représentent les abaques relatives aux formules (9) (cas du milieu isotrope). Les valeurs des $\operatorname{tg} \theta_x$ et $\operatorname{tg} \theta_y$ sont déterminées par différences de cotes sur un schéma à échelle convenable représentant les différentes coupes du réseau et de la surface.

2. — Montage expérimental.

Les réseaux à résistances amovibles permettent de réaliser rapidement des modèles analogiques à trois dimensions et de les exploiter de façon commode : des panneaux, semblables à ceux décrits au chapitre II, reçoivent chacun une section du modèle (ces sections comprenant, par exemple, les conductances parallèles à $\bar{x}$ et à $\bar{z}$). Ces panneaux sont reliés entre eux nœud à nœud par des conductances de liaison (conductances parallèles à y), portées par des panneaux spéciaux (panneaux de liaison), comme l'indique la coupe horizontale représentée *figure 62*.

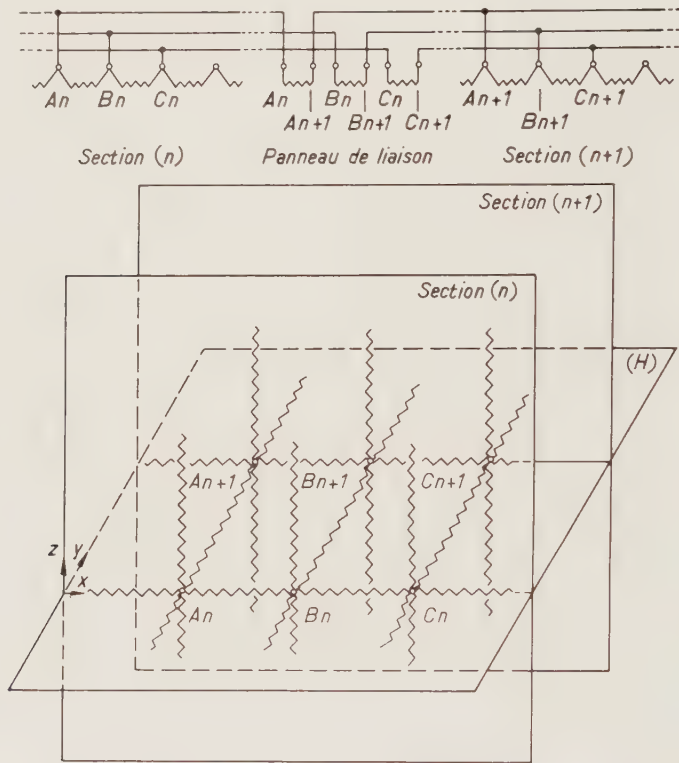


Fig. 62. — Coupe du plan (H)

3. — Essai de la méthode.

J'ai éprouvé la valeur pratique de la méthode en réalisant un modèle analogique tridimensionnel au réseau, identique au modèle en plâtre décrit page 70 (barrage isotrope sur sous-sol perméable, le tout limité par une vallée imperméable en forme de dièdre rectangle). Les détails des connexions du réseau sont donnés planche III₂. On peut remarquer le faible nombre de mailles utilisées : l'intervalle vertical compris entre le plan de charge et le drain n'est divisé qu'en quatre parties.

La surface libre trouvée par la méthode des injections et la répartition du potentiel à l'intérieur du modèle ont été comparées aux résultats de la cuve rhéoelectrique (voir planches III₃ à III₆). L'écart maximum de la surface libre était de 5 % de la hauteur de charge. Cet écart était situé à la base de la surface libre, où elle se raccorde

verticalement avec le drain. Or, cette région est voisine de la pointe du drain, où le gradient est très élevé. Les conductances aboutissant à cette pointe ont été calculées en tenant compte des dérivées infinies, comme il est indiqué au chapitre II (p. 17), ce qui a pour effet de leur donner une valeur 1,5 fois plus faible que la valeur normale. Comme les mailles en cette région sont de grandes dimensions, l'effet résultant est une conductivité trop faible au voisinage de la pointe du drain, ce qui contribue à remonter la surface libre.

De toute façon, la concordance entre les surfaces trouvées au réseau et à la cuve est très satisfaisante pratiquement. D'autre part, l'erreur maximum du potentiel relevé dans le réseau est de l'ordre de 2 % par rapport à la cuve.

4. — Intérêt des réseaux.

J'ai éprouvé la méthode des réseaux sur un cas homogène et isotrope, afin de pouvoir la comparer avec la cuve. Mais l'intérêt pratique de cette méthode apparaît surtout dans les problèmes comportant des milieux anisotropes, hétérogènes ou zonés, qui se traitent presque aussi simplement que les cas isotropes. Pour ces derniers, surtout s'ils sont de formes compliquées, les modèles en plâtre semblent préférables. Les différences d'intérêt entre les réseaux à trois dimensions et les modèles en plâtre sont analogues à celles existant entre les réseaux à deux dimensions et les modèles en papier conducteur.

C. — UTILISATION DE LA CUVE

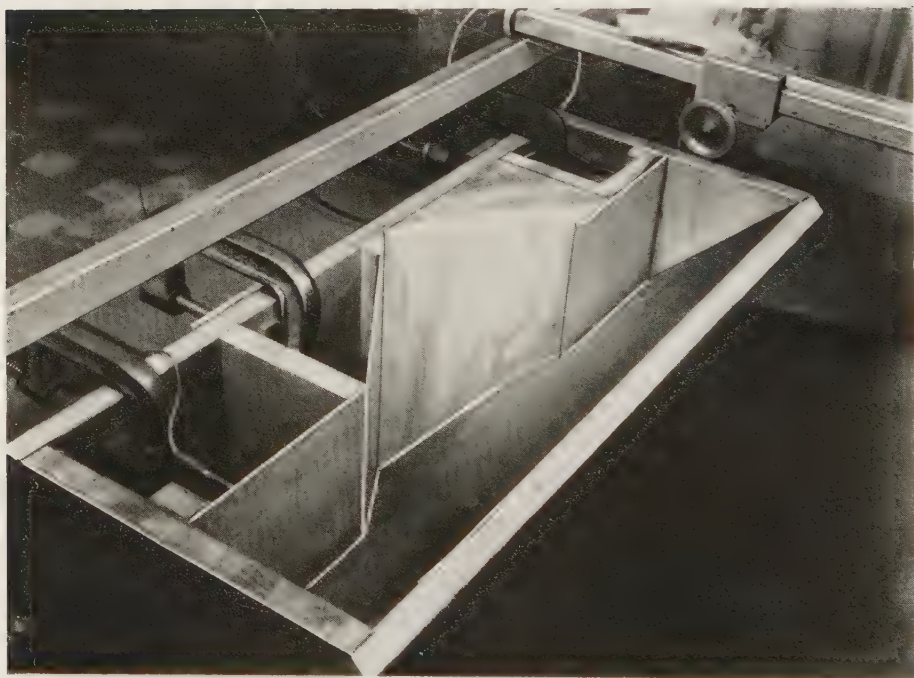
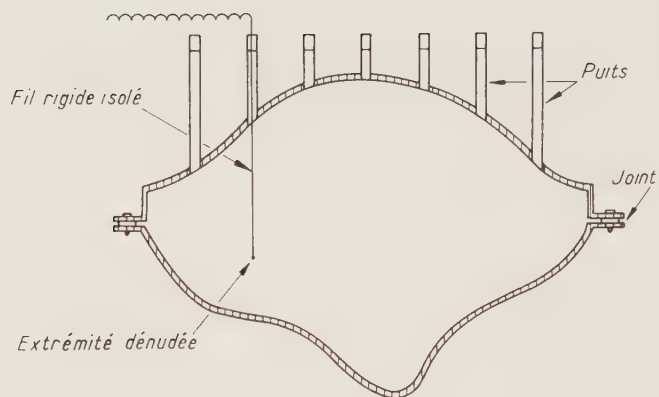
Nous avons vu, au début de ce chapitre (partie I, p. 63), que l'utilisation de la cuve, pour réaliser des modèles analogiques à trois dimensions, était longue et onéreuse. Néanmoins, cette méthode est toujours possible si l'on dispose d'un délai suffisant, et si l'importance du problème envisagé justifie certains frais.

Les problèmes pouvant être traités à la cuve sont du type isotrope et homogène, ou zonés, à l'exclusion des problèmes en milieux hétérogènes. La technique de la cuve est suffisamment connue actuellement pour ne pas avoir besoin de la décrire (voir, à ce sujet, réf. [5] du chap. premier). Signalons simplement quelques caractéristiques d'une cuve relative à un problème de filtration à trois dimensions.

1. — Cas d'un modèle de forme quelconque.

Si le modèle analogique a une forme quelconque (parois non planes, pas de plan de symétrie), la cuve doit former un récipient entièrement fermé et étanche. Les parois intérieures doivent être soit isolantes (parois imperméables du modèle, surface libre), soit métallisées (frontière équipotentielle), soit pavées de petites électrodes (surface de suintement). La cuve doit pouvoir être ouverte pour être modifiée à chaque approximation de la surface libre, ainsi que pour le décapage des électrodes.

Le relevé du potentiel peut se faire de façon commode à l'aide de tubes étroits ou puits verticaux, raccordés à la partie supérieure de la cuve (*fig. 63*) : on introduit par ces puits un fil fin isolé et rigide dont l'extrémité est dénudée sur une très courte longueur. On relève ainsi le potentiel le long de lignes verticales choisies à l'avance.



2. — Cas d'un modèle à paroi plane.

Si un écoulement est limité par une paroi imperméable plane de grandes dimensions, ou bien admet un plan de symétrie de l'écoulement, on peut matérialiser cette surface plane par la surface libre de la cuve. L'exploration du champ à l'intérieur du modèle peut alors se faire d'une façon continue : la sonde est montée sur un double chariot qui lui permet de se déplacer horizontalement. Une crémaillère (avec repère gradué) lui assure un déplacement vertical.

La *figure 64* montre le dispositif utilisé pour représenter le modèle analogique décrit plus haut (barrage à trois dimensions) : le modèle possédant un plan vertical longitudinal de symétrie, la surface libre de la cuve figure ce plan. La sonde est un fil de laiton isolé par un tube fin en verre sur toute sa longueur : seule, l'extrémité du fil dépasse le tube de 0,5 mm environ. La sonde est coudée à son extrémité pour mieux explorer le champ au voisinage des parois isolantes de la cuve.

Notons, pour terminer cet aperçu sur les possibilités pratiques de la cuve, que cette dernière peut être utilisée, à partir des résultats obtenus, à l'aide d'un modèle en plâtre : on diminue ainsi considérablement le nombre des approximations de la surface libre, le rôle de la cuve se réduisant à une vérification suivie de légères modifications.

APPENDICE

Expressions exactes des débits d'infiltration dans des barrages tridimensionnels à parois verticales

I. — FORMULES DE DUPUIT

La formule bien connue de DUPUIT, qui donne directement le débit d'infiltration à surface libre dans un massif perméable rectangulaire, reposant sur un fond imperméable horizontal (*fig. 65*), peut s'écrire :

$$(1) \quad q/K = h_1^2 \frac{h_2^2}{2l},$$

en appelant :

q , le débit par unité d'épaisseur de digue (problème plan);

K , la perméabilité du massif supposé homogène et isotrope;

h_1 et h_2 , les niveaux des plans de charges amont et aval;

l , la largeur de la digue (dans la direction amont-aval).

Il existe également une formule analogue, relative à l'écoulement de révolution, soit :

$$(2) \quad Q/K = \pi \frac{h_1^2 - h_2^2}{\log r_1/r_2},$$

où Q est le débit total (problème à trois dimensions), et r_1 et r_2 les rayons des parois cylindriques concentriques du massif filtrant (*fig. 66*).

Ces deux formules sont souvent établies à partir de la théorie simplifiée de DUPUIT-FORCHEIMER, et passent généralement, de ce fait, pour des formules approchées (1). On sait que les hypothèses simplificatrices de cette théorie sont les suivantes :

a) le potentiel φ de l'écoulement est indépendant de la cote z ;

b) il est égal à la cote de la surface libre relative à la verticale considérée.

(1) Cf. MUSKAT (réf. [2], chap. premier) qui s'étonne de la précision de cette formule, en la comparant aux résultats numériques calculés d'après la théorie de HAMEL (pp. 316-318). Il explique intuitivement cette « coïncidence » par comparaison avec un écoulement voisin pouvant être résolu au moyen des séries de FOURIER (pp. 377-381.)

Or, les formules (1) et (2) sont exactes, car il est possible de les établir sans utiliser les simplifications *a)* et *b)* : une démonstration rigoureuse est donnée dans le livre de M^{me} POLOUBARINOVA-KOTCHINA (réf. [4] du chap. premier). D'autre part, je ne sais s'il est connu que, comme me l'a signalé M. PÈRES, ces formules résultent immédiatement de la relation de GREEN entre deux fonctions harmoniques *f* et *p*, soit :

$$(3) \quad \int_{(S)} \left(p \frac{df}{dn} - f \frac{dp}{dn} \right) dS = 0,$$

en prenant pour *p* le potentiel φ de l'écoulement de filtration, et pour *f* l'une ou l'autre des fonctions *x* et $\log (x^2 + y^2)$, suivant le cas envisagé (l'intégrale étant soit curviligne, soit de surface). *S* est la frontière du domaine occupé par le fluide dans le massif filtrant, et *n* la normale à *S* orientée vers l'extérieur. Les détails de l'intégration, dans le cas du massif rectangulaire plan, sont donnés dans le tableau ci-dessous, avec les notations de la figure 65.

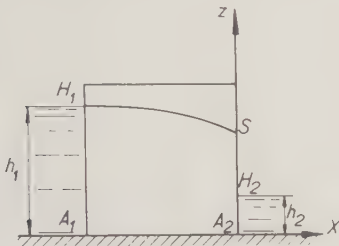


Fig. 65

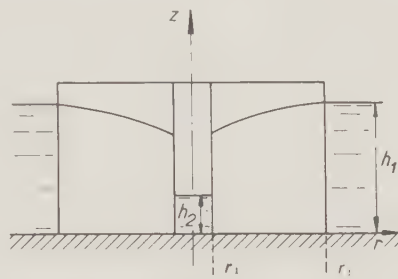


Fig. 66

	<i>p</i>	$\frac{dp}{dn}$	<i>f</i>	$\frac{df}{dn}$	$\int \left(p \frac{df}{dn} - f \frac{dp}{dn} \right) dS$
A ₁ H ₁	<i>h</i> ₁	φ'_n	− <i>l</i>	− 1	− <i>h</i> ₁ ² + <i>lQ/K</i>
H ₁ S	<i>z</i> '	0	<i>x</i>	$\frac{dx}{dn}$	$\frac{1}{2} (h_1^2 - h_s^2)$
S H ₂	<i>z</i>	φ'_n	0	+ 1	$\frac{1}{2} (h_s^2 - h_2^2)$
H ₂ A ₂	<i>h</i> ₂	φ'_n	0	+ 1	+ <i>h</i> ₂ ²
A ₂ A ₁	φ	0	<i>x</i>	0	0

II. — EXTENSION A DES CAS PLUS GÉNÉRAUX

Il est intéressant de rechercher les extensions possibles de cette méthode. Supposons donc un massif perméable séparant deux plans d'eau dans une vallée imperméable, de forme *a priori* quelconque. Le volume occupé par le fluide dans le massif est limité par une surface *S* constituée par :

— les surfaces A₁ et A₂ des parements amont et aval du massif, baignées par les bassins correspondants;

- une partie V de la vallée;
- une surface libre Σ ;
- une surface de suintement Σ' , sur le parement aval du massif.

Écrivons la relation de GREEN sous la forme :

$$(4) \quad \int_s \varphi \frac{df}{dn} dS = \int_s f \frac{d\varphi}{dn} dS,$$

où figure, avec le potentiel des vitesses φ , une autre fonction harmonique f , pour le moment arbitraire. Le problème consiste à choisir si possible la fonction f , de façon que les deux intégrales puissent se calculer *a priori*, sans que l'on ait à déterminer d'abord l'écoulement et les formes des surfaces libre Σ et de suintement Σ' .

Tout d'abord, remarquons que l'intégrale au second membre n'est différente de zéro que sur les surfaces A_1 du parement amont, et $A_2 + \Sigma'$ du parement aval. Si f prend des valeurs constantes f_1 et f_2 sur ces parements, cette intégrale s'écrira :

$$(5) \quad (f_1 - f_2) Q/K,$$

où Q est le débit et K la perméabilité.

Reste l'intégrale au premier membre. Sur les surfaces inconnues Σ et Σ' , φ est égal à la cote z . Nous avons donc à évaluer :

$$(6) \quad \int_{\Sigma + \Sigma'} z \frac{df}{dn} dS.$$

Or, il est immédiat que les lignes de niveau de la surface $\Sigma + \Sigma'$, dont les cotes z sont comprises entre les cotes h_1 et h_2 des plans d'eau amont et aval, iront d'un bord à l'autre de la vallée. Soit AB une telle ligne, parcourue dans le sens qui fait $+\pi/2$ avec le sens de l'écoulement, et s son arc. On a :

$$dS = ds \cdot dz/\sin \theta,$$

et les cosinus directeurs de la normale n sont :

$$\frac{dy}{ds} \sin \theta, \quad -\frac{dx}{ds} \sin \theta, \quad \cos \theta,$$

si θ est l'angle de cette normale avec la verticale, dx et dy étant pris sur la ligne de niveau. L'intégrale (6) peut alors s'écrire :

$$(7) \quad \int_{h_2}^{h_1} z dz \int_{AB} (f'_x dy - f'_y dx + f'_z \cotg \theta) ds.$$

Pour qu'elle ne dépende que de la forme de la vallée, il faut d'abord que f soit indépendante de z . Dans ces conditions, g étant la fonction conjuguée de f , l'intégrale (7) devient :

$$(8) \quad \int_{h_1}^{h_2} [g(B) - g(A)] z \, dz.$$

Elle s'évalue *a priori* si les lignes de niveau de la vallée sont des lignes $g = \text{Cte}$, $g(B)$ et $g(A)$ étant alors des fonctions connues de z . De plus, l'intégrale prise sur V disparaît et, le potentiel φ prenant les valeurs h_1 et h_2 sur les surfaces Λ_1 et Λ_2 , la relation (1) donne le débit Q :

$$(9) \quad (f_1 - f_2) Q/K = h_1 \int_{\Lambda_1} \frac{df}{dn} dS + h_2 \int_{\Lambda_2} \frac{df}{dn} dS + \int_{h_2}^{h_1} [g(B) - g(A)] \cdot z \cdot dz.$$

En résumé, cette formule est applicable dans les conditions suivantes :

a) les lignes de niveau de la vallée forment en projection horizontale un système isotherme défini par $g(x, y) = \text{Cte}$, g étant fonction harmonique de deux variables. L'équation de la vallée est donc :

$$(10) \quad z = \Phi[g(x, y)],$$

Φ donnant, dans le cas le plus simple, deux déterminations de g en fonction de z , qui correspondent aux deux versants de la vallée (1);

b) le massif poreux est limité par des parements cylindriques verticaux d'équations :

$$(11) \quad f(x, y) = f_1; \quad f(x, y) = f_2,$$

la fonction f étant harmonique et ayant g pour conjuguée.

On peut remarquer que la présence dans le massif de surfaces imperméables infiniment minces, ou coupures, et dont l'équation est de la forme :

$$z = \Phi_1[g(x, y)],$$

Φ_1 étant quelconque, ne modifie pas le débit Q : en effet, le long d'une telle surface, les deux intégrales de (4) sont nulles.

III. — QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION

On peut trouver un grand nombre de fonctions harmoniques g convenant à des formes pratiques de vallées. En voici quelques exemples simples :

$$1^o \quad \underline{f = x; \quad g = y.}$$

(1) Le cas d'une fonction Φ donnant plus de deux déterminations de g en fonction de z correspondrait à une vallée à sillons multiples. La ligne AB considérée dans le texte serait fractionnée en plusieurs arcs $A_i B_i$, et l'expression $g(B) - g(A)$ remplacée par $\sum [g(B_i) - g(A_i)]$. Notons que le nombre de déterminations de g doit être pair.

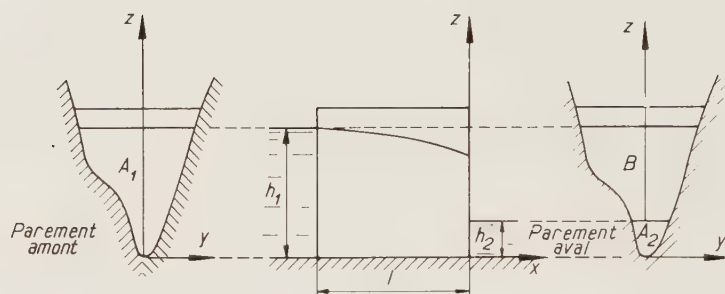


Fig. 67

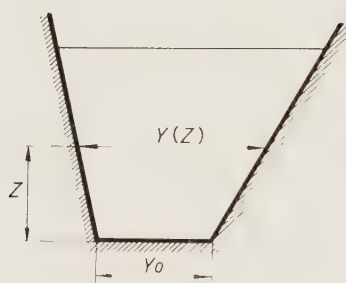


Fig. 68

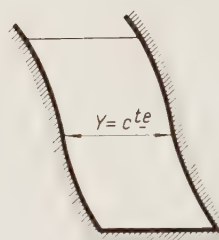


Fig. 69

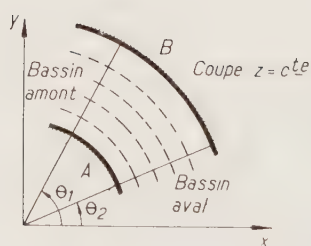


Fig. 70

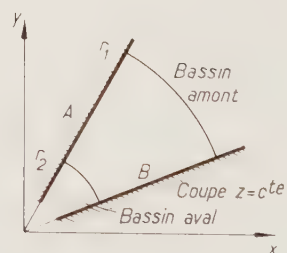


Fig. 71

On obtient ainsi le cas d'un massif filtrant barrant une vallée cylindrique horizontale, dont les parements sont des sections droites de la vallée (*fig. 67*). La formule (9) devient :

$$(12) \quad lQ/K = h_1 A_1 - h_2 A_2 - \mathcal{M}_{xy}^l(B),$$

où :

l = la longueur du barrage (distance entre les parements);

A_1 et A_2 = les sections de la vallée limitées aux niveaux h_1 et h_2 ;

B = la section de la vallée comprise entre les niveaux h_1 et h_2 .

Si la section de la vallée est donnée graphiquement, A_1 , A_2 et le moment de B peuvent être calculés par les procédés graphiques classiques. Dans le cas particulier d'une vallée à section trapézoïdale et à fond plat (*fig. 68*), (12) s'écrit :

$$(12') \quad lQ/K = \frac{h_1 - h_2}{12} [6 Y_0 (h_1 + h_2) + [(h_1 + h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2] t],$$

la largeur Y de la vallée variant linéairement avec z , suivant la relation :

$$Y = Y_0 + zt.$$

Si $t = 0$, nous retrouvons la formule de DUPUIT relative au massif rectangulaire plan [formule (1) de ce texte] :

$$Q/KY_0 = q/K = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l}.$$

La formule de DUPUIT s'applique donc non seulement au cas plan mais aussi au massif filtrant tridimensionnel à parements verticaux, et d'épaisseur horizontale Y constante (*fig. 69*).

Si le massif est anisotrope, avec une perméabilité principale horizontale Kx , dirigée suivant la direction x de la vallée, on peut utiliser l'équation (12) en remplaçant le terme K par Kx : ce résultat s'établit simplement en considérant le débit traversant le massif de perméabilité isotrope $K = (Kx \cdot Ky \cdot Kz)^{1/2}$, et dont les dimensions se déduisent du massif anisotrope donné par affinités suivant $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$, de rapports $(Kx)^{-1/2}$, $(Ky)^{-1/2}$ et $(Kz)^{-1/2}$;

$$2^o \quad f = 0 = \text{arc tg } (y/x); \quad g = \text{colog } r = \text{colog } (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

C'est le cas d'une vallée de révolution à axe vertical, les parements du barrage étant des plans méridiens d'angles polaires θ_1 et θ_2 (*fig. 70*). La relation (9) devient :

$$(13) \quad (\theta_1 - \theta_2) Q/K = h_1 \int_{A_1} \frac{dS}{r} + h_2 \int_{A_2} \frac{dS}{r} + \int_B \frac{z dS}{r}.$$

Comme pour la vallée cylindrique, on peut intégrer (13) graphiquement si la section méridienne donnée est quelconque;

$$3^o \quad f = \log (x^2 + y^2)^{1/2}; \quad g = 0 = \text{arc tg } (y/x).$$

La vallée est ici une surface réglée, dont les génératrices sont des horizontales rencontrant une même verticale (conoïde). Il s'agit donc d'une vallée convergente, et les parements du barrage sont des cylindres verticaux concentriques de rayons r_1 et r_2 (fig. 71). On obtient pour (9) :

$$(14) \quad \text{Log } r_1/r_2 \cdot Q/K = -h_1 \cdot \frac{A_1}{r_1} + h_2 \cdot \frac{A_2}{r_2} + \int_{h_2}^{h_1} [\theta(B) - \theta(A)] z dz.$$

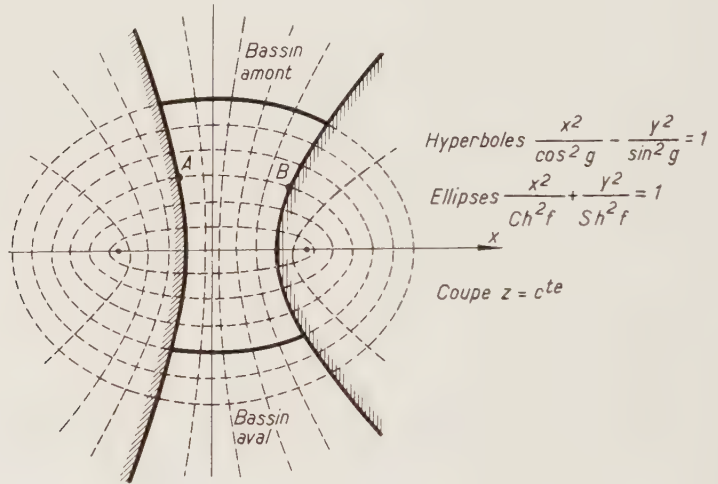


Fig. 72

En faisant $\theta(B) - \theta(A) = C^{te} = 2\pi$, on retrouve l'écoulement de révolution entre deux réservoirs concentriques, et (14) devient la formule correspondante de DUPUIT [formule (2) de ce texte], car on a, dans ces conditions :

$$A_1 = 2\pi r_1 h_1 \quad \text{et} \quad A_2 = 2\pi r_2 h_2;$$

$$4^o \quad f = \mathcal{R} [\text{Arg Ch } (x + iy)]; \quad g = \mathcal{I} [\text{Arg Ch } (x + iy)].$$

Les courbes $g = C^{te}$ et $f = C^{te}$ représentent deux familles d'hyperboles et d'ellipses homofocales. On peut ainsi obtenir des vallées avec étranglement (fig. 72).

ÉCOULEMENTS NON PERMANENTS

I. — Introduction

A. — NOUVELLE CLASSE DE PROBLÈMES

Nous avons vu, dans les chapitres précédents, que les écoulements de filtration permanents à surface libre, pour lesquels on néglige les effets de capillarité, pouvaient se résoudre pratiquement par analogie électrique, dans le cas le plus général. Il reste néanmoins une classe très importante d'écoulements constituée par les écoulements non permanents. On peut citer, à titre d'exemples, le mouvement de l'eau dans un barrage en terre lors de la vidange de la retenue, l'abaissement de la nappe phréatique près d'un puits ou bien encore le drainage d'un terrain après une pluie. Dans ces problèmes, les conditions aux limites varient avec le temps, ainsi que la forme du domaine de l'écoulement. La fonction potentielle φ dépend de la variable temps, en plus des coordonnées de l'espace, et n'est plus solution de l'équation linéaire étudiée chapitre II :

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0.$$

Si l'on tient compte des faibles valeurs des vitesses et des accélérations, et si l'on néglige, par suite, les effets d'inertie dans les écoulements non permanents, on montre facilement qu'à chaque instant ces écoulements obéissent à la loi de DARCY, et que φ est harmonique par rapport aux coordonnées de l'espace (cas d'un milieu isotrope), ou plus généralement, solution de l'équation (1). Dès 1904, BOUSSINESQ (réf. [1]) avait étudié les écoulements non permanents à surface libre en posant ces hypothèses.

Ainsi, il nous est possible de connaître à chaque instant t la configuration de l'écoulement par simple analogie électrique, sous réserve, bien entendu, de connaître les conditions aux limites. Nous allons donc examiner en détail les différents types de conditions que l'on peut rencontrer, ainsi que leurs modes de variation en fonction du temps.

B. — CONDITIONS AUX LIMITES

Considérons, pour fixer les idées, le cas du massif perméable isotrope à deux dimensions représenté *figure 73* : il est limité inférieurement et à gauche par une assise imperméable AA', et baigné à droite par un bassin de niveau h_0 . Nous supposons qu'initialement, la surface libre de l'eau dans le massif est horizontale.

Si le niveau du bassin se met à baisser suivant une fonction connue $h(t)$, la surface libre dans le massif va baisser aussi, en se déformant, et il va apparaître une surface de suintement HS.

Nous négligerons, dans ce qui suit, les effets de la capillarité à la frontière de l'écoulement.

1. — Parement AH en contact avec l'eau du bassin.

L'eau libre du bassin est équipotentielle, les pertes de charge y étant supposées négligeables vis-à-vis des pertes dans le massif même. La portion de frontière AH est donc une équipotentielle de valeur :

$$\varphi = h(t).$$

Son potentiel varie avec le temps, ainsi que sa longueur, suivant une loi connue (données du problème).

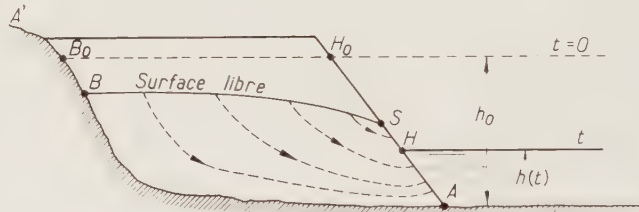


Fig. 73

2. — Frontière imperméable AA'.

Aucun flux ne la traversant, on a, à tout instant :

$$\partial \varphi / \partial n = 0,$$

n étant la normale à la frontière. La condition à imposer est du type de NEUMANN, indépendante du temps. Par contre, l'extrémité B de la portion AB intéressée par l'écoulement, à l'instant t , se déplace avec la surface libre.

3. — Surface de suintement.

Le long de la surface de suintement SH, la pression est égale à la pression atmosphérique que l'on peut prendre comme origine des pressions. Par suite :

$$\varphi = z,$$

Le potentiel, en chaque point de SH, est donc indépendant du temps. Mais, d'autre part, les deux extrémités H et S de la surface de suintement se déplacent au cours du temps : H suivant une loi connue, liée à $h(t)$, et S suivant le déplacement de la surface libre.

4. — Surface libre.

Le long de la surface libre, comme pour la surface de suintement, on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Mais cette surface, qui est ligne de courant dans le cas d'un écoulement permanent, est traversée ici par un flux. Comme elle n'est pas alimentée par le dessus, ce flux provoque son déplacement.

II. — Détermination du mouvement de la surface libre

L'examen précédent des différentes conditions aux limites montre qu'elles sont parfaitement déterminées à un instant t si l'on connaît la position de la surface libre correspondante. Ainsi, si l'on dispose des analogies électriques, l'étude d'un écoulement non permanent à surface libre se ramène au problème de la détermination du mouvement de cette surface. Plus précisément, puisque c'est le flux traversant la surface libre à un instant t qui détermine son mouvement, et que ce flux peut être déterminé sur un modèle analogique, le problème revient tout d'abord à déterminer la relation existant entre le flux et le déplacement.

A. ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA SURFACE LIBRE

BOUSSINESQ avait établi, en 1904, la relation entre la vitesse instantanée de déplacement de la surface libre et le gradient du potentiel : soient (S) et (S') les positions prises par la surface libre aux temps voisins t et $t + dt$, $\widehat{OA}$ et $\widehat{O'A'}$ deux éléments d'aire ϑs respectivement sur (S) et (S'), et dn l'écart normal entre $\widehat{OA}$ et $\widehat{O'A'}$ (fig. 74). $\widehat{OA}$ est traversé par un débit (de valeur $-K \varphi'_n \cdot \vartheta s$) qui, pendant le temps dt , remplit les vides du volume $OAA'O'$. En appelant ε la porosité du milieu et K sa perméabilité, nous pouvons donc écrire :

$$\varepsilon \cdot \vartheta s \cdot dn = -K \cdot \varphi'_n \cdot \vartheta s \cdot dt$$

ou :

$$\frac{\varepsilon}{K} \cdot \frac{dn}{dt} = -\varphi'_n.$$

Si $z = h(x, t)$ est l'équation de (S), on a :

$$h'_t = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{dn}{dt}.$$

D'où l'équation du déplacement vertical de la surface libre :

$$(2) \quad \frac{\varepsilon}{K} \cdot h'_t = -\frac{1}{\cos \theta} \cdot \varphi'_n.$$

Comme $\varphi'_n = -\varphi'_x \sin \theta + \varphi'_z \cos \theta$ et que $\operatorname{tg} \theta = h'_x$, l'expression (2) peut se mettre sous la forme :

$$(3) \quad \frac{\varepsilon}{K} \cdot h'_t = \varphi'_x \cdot h'_x - \varphi'_z.$$

On peut trouver d'autres expressions équivalentes pour (3). Par exemple, en dérivant par rapport à x l'identité :

$$(4) \quad \varphi [x, h(x, t), t] \equiv h(x, t),$$

qui exprime que $\varphi = z$ sur la surface libre, on obtient :

$$(5) \quad \varphi'_x = (1 - \varphi'_z) \cdot h'_x.$$

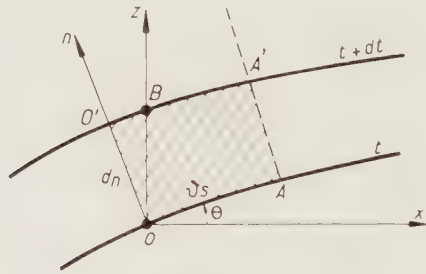


Fig. 74

En combinant (5) et (3), on peut écrire :

$$(3') \quad \frac{\varepsilon}{K} \cdot h'_t = -\varphi'_z \cdot (1 + h'^2_x) + h'^2_x$$

ou :

$$(3'') \quad \frac{\varepsilon}{K} \cdot h'_t = \varphi'_x \cdot \left(h'_x + \frac{1}{h'_x} \right) - 1.$$

B. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT PAR DIFFÉRENCES FINIES

L'équation (3) n'est intégrable analytiquement que dans certains cas très particuliers et moyennant certaines hypothèses simplificatrices. BOUSSINESQ montre que cette équation peut se réduire à :

$$(6) \quad \frac{\varepsilon}{K} \cdot h'_t = \frac{\partial}{\partial x} (h \cdot h'_x),$$

en négligeant les vitesses verticales devant les vitesses horizontales. D'autres auteurs (réf. [2] à [5]) ont également utilisé ces hypothèses simplificatrices pour traiter par le calcul divers cas simples.

1. — Différences finies dans le temps.

On peut néanmoins résoudre pratiquement l'équation (3) en procédant de proche en proche. Étant donné une position connue (S) de la surface libre à un instant t , un modèle analogique nous fournit les valeurs de φ'_x et de φ'_z le long de (S). Ces valeurs, portées dans l'équation (3), nous permettent de calculer h'_t en tout point de (S), et, en négligeant les variations de h'_t pendant un court intervalle de temps Δt , de déterminer la position voisine (S') de la surface libre, correspondant au temps $t + \Delta t$. On a, pour toute valeur de x :

$$(7) \quad \Delta h = h(S) - h(S') = h'_t \cdot \Delta t.$$

On détermine alors la nouvelle répartition des vitesses h'_t le long de (S'), à l'aide d'un autre modèle analogique, dans lequel la surface libre (S) est devenue (S'), et l'on recommence. On obtient ainsi, de proche en proche, une série de positions de la surface libre, correspondant à des instants particuliers. Ce procédé semble avoir été utilisé pour la première fois par E. C. CHILDS, en 1947 (réf. [7] et [8]), puis par G. SCHNEEBELI et moi-même, en 1953 (réf. [9]).

2. — Corrections graphiques.

La substitution de différences finies aux dérivées de h par rapport à la variable t apporte une erreur sur le calcul de Δh , de l'ordre de :

$$(8) \quad \frac{1}{2} h''_{t^2} \cdot \Delta t^2.$$

Si l'on choisit des intervalles de temps Δt suffisamment petits, l'erreur peut être négligée. Par contre, le nombre d'étapes nécessaires pour étudier le déplacement de la surface libre durant une période T , égale à $T/\Delta t$, risque de devenir trop élevé si Δt est trop petit : on doit alors réaliser un nombre excessif de modèles analogiques. C'est pourquoi j'utilise la méthode de correction suivante qui permet de modifier les termes Δh calculés et de faire passer l'erreur à un ordre supérieur.

Soit M_1 et M_2 les points d'intersection de deux positions S_1 et S_2 de la surface libre, relatives aux temps t_1 et $t_2 = t_1 + \Delta t$, avec une même verticale, et h_1 et h_2 les cotes de M_1 et M_2 (*fig. 75*). Nous pouvons écrire :

$$(9) \quad \Delta h = h_1 - h_2 = (h'_t)_1 \Delta t + \frac{1}{2} (h''_{t^2})_1 \Delta t^2 + \frac{1}{6} (h'''_{t^3})_1 \Delta t^3 + \dots$$

D'autre part :

$$(10) \quad (h'_t)_2 = (h'_t)_1 + (h''_{t^2})_1 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} (h'''_{t^3})_1 \cdot \Delta t^2 + \dots$$

En combinant (9) et (10), nous obtenons :

$$(11) \quad h_1 - h_2 = \frac{1}{2} [(h'_t)_1 + (h'_t)_2] \cdot \Delta t - \frac{1}{12} (h'''_{t^3})_1 \cdot \Delta t^3 + \dots$$

Ainsi, en prenant pour vitesse moyenne intégrale entre les temps t_1 et t_2 , la moyenne arithmétique des vitesses initiale et finale, soit :

$$(12) \quad [(h'_t)_1 + (h'_t)_2]/2,$$

l'erreur commise sur Δh est de l'ordre de :

$$(13) \quad \frac{1}{12} (h'''_t)_1 \cdot \Delta t^3.$$

Cette erreur est plus faible que l'expression (8). Mais si, dans l'expression (12) de la vitesse moyenne, nous connaissons $(h'_t)_1$, que nous mesurons sur un modèle analogique correspondant à la position S_1 de la surface libre, nous ne connaissons pas $(h'_t)_2$, car S_2 n'étant pas connue, nous ne pouvons réaliser le modèle analogique correspondant. On prend alors une position arbitraire S'_2 , définie en tout point par :

$$(14) \quad \Delta h = M_1 M'_2 = h_1 - h'_2 = (h'_t)_1 \Delta t,$$

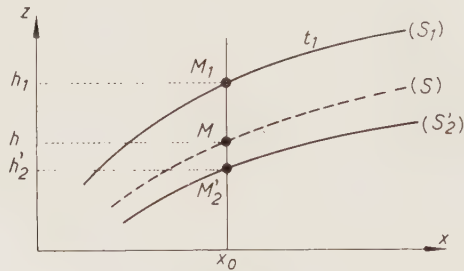


Fig. 75

ou mieux, si l'on connaît déjà quelques étapes de la surface libre avant S_1 , par extrapolation de h en fonction du temps. Un modèle analogique nous donne $(h'_t)'_2$ en tout point de S'_2 . En supposant alors que le terme h'_t , mesuré en M sur un modèle analogique correspondant à une position S comprise entre S_1 et S'_2 , et de forme semblable, varie linéairement de $(h'_t)_1$ à $(h'_t)'_2$ quand M se déplace de M_1 à M'_2 , c'est-à-dire que ⁽¹⁾ :

$$(15) \quad h'_t = (h'_t)_1 + [(h'_t)'_2 - (h'_t)_1] \cdot M_1 M / M_1 M'_2,$$

on peut déterminer, par un graphique simple, la position M_2 de M, telle que :

$$(16) \quad h_1 - h_2 = \frac{1}{2} [(h'_t)_1 + (h'_t)_2] \cdot \Delta t.$$

Le graphique en question est indiqué figure 76 : en abscisse est portée la cote h de M et en ordonnée la vitesse h'_t mesurée sur modèle analogique. La droite $m_1 m'_2$ représente la variation linéaire de h'_t , et la droite $m_1 n_2$ la variation de :

$$(17) \quad \frac{1}{2} [(h'_t)_1 + h'_t].$$

(1) Notons bien que cette interpolation n'est pas une interpolation dans le temps, mais une interpolation relative à une même mesure sur deux modèles analogiques légèrement différents.

L'intersection I de $m_1 n_2$ avec la droite D, d'équation :

$$Y = X/\Delta t,$$

a pour abscisse la valeur de h_2 cherchée. La valeur de la vitesse $(h'_t)_2$ correspondante est l'ordonnée du point m_2 .

La surface S_2 , lieu des points M_2 ainsi obtenus, représente la position de la surface libre au temps $t_2 = t_1 + \Delta t$, à une erreur près, exprimée par (13), à condition, toutefois, que l'hypothèse (15) soit vraisemblable. Effectivement, cette interpolation linéaire est justifiée, car elle porte sur une correction, le point M_2 étant toujours proche de M'_2 par rapport à la distance $M_1 M'_2$, et les vitesses mesurées en M_1 et en M'_2 étant souvent voisines. On peut d'ailleurs, si l'écart est trop important, recommencer le processus à partir de S_2 (au lieu de S'_2), et la nouvelle correction à apporter est alors très faible. L'expérience montre que cette deuxième correction n'est nécessaire que dans de rares cas, comme, par exemple, au départ de l'abaissement d'une surface libre dans un barrage, à partir d'une position stationnaire, la vidange de la retenue étant lente : la vitesse

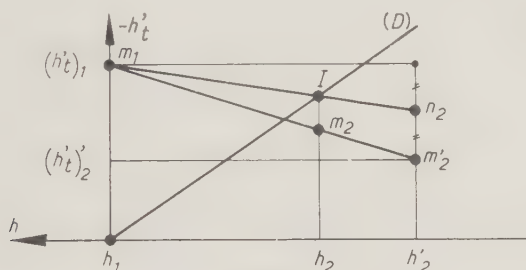


Fig. 76

de déplacement est nulle initialement en tout point de la surface libre et varie donc relativement vite.

En résumé, la méthode consiste pratiquement aux opérations suivantes : étant donné la position connue S_1 de la surface libre au temps t_1 , et la répartition de $(h'_t)_1$, valeur de h'_t au temps t_1 , on se donne arbitrairement la position S'_2 de la surface libre au temps $t_2 = t_1 + \Delta t$. On mesure, à l'aide de la relation (3), sur un modèle analogue relatif à S'_2 , la répartition de $(h'_t)'_2$, et l'on détermine la correction nécessaire à apporter à la position de S'_2 au moyen de graphiques du type de la *figure 76* pour chaque point de cette surface. Ce qui nous donne la position corrigée S_2 de la surface libre au temps t_2 et la répartition des vitesses $(h'_t)_2$ correspondantes (relevées sur les graphiques). On peut alors recommencer pour une autre étape, à partir de S_2 , le nouvel intervalle de temps pouvant être différent du précédent.

C. GÉNÉRALITÉ DE LA MÉTHODE PAR DIFFÉRENCES FINIES

Les possibilités d'application de cette méthode sont très étendues, les analogies électriques se prêtant facilement aux problèmes comportant des domaines de formes compliquées. D'autre part, le procédé par étapes dans le temps permet de tenir compte d'une variation tout à fait quelconque des charges hydrauliques, du moment que cette variation

est connue : c'est généralement le cas du régime de vidange de la retenue d'un barrage, dont la variation de la hauteur de charge en fonction du temps est donnée graphiquement.

Cette méthode s'applique sans difficultés aux problèmes tridimensionnels. La relation (3) prend alors la forme :

$$(18) \quad \frac{\varepsilon}{K} h'_t = \varphi'_x \cdot h'_x + \varphi'_y \cdot h'_y - \varphi'_z.$$

Dans le cas d'un milieu anisotrope, dont les axes principaux X et Z font un angle α avec les directions x et z (problème à deux dimensions), (3) devient :

$$(19) \quad \varepsilon \cdot h'_t = -u \cdot h'_x + v,$$

u et v étant les composantes de la vitesse suivant x et z , soit :

$$(20) \quad \begin{cases} u = -K_x \cdot \varphi'_x \cdot \cos \alpha + K_z \cdot \varphi'_z \cdot \sin \alpha, \\ v = -K_x \cdot \varphi'_x \cdot \sin \alpha - K_z \cdot \varphi'_z \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

Quand les axes principaux coïncident avec x et z , (19) devient :

$$(21) \quad \varepsilon \cdot h'_t = K_x \cdot \varphi'_x \cdot h'_x - K_z \cdot \varphi'_z.$$

III. — Modes opératoires

J'ai utilisé jusqu'à présent deux techniques analogiques, celle du papier conducteur et celle des réseaux de conductances. Cette dernière méthode permet d'étudier des écoulements à trois dimensions, ainsi que des cas de milieux anisotropes et hétérogènes.

Dans ce qui suit, nous prendrons comme nouvelle variable de temps :

$$\tau = \frac{K}{\varepsilon} t;$$

τ a les dimensions d'une longueur.

A. — MÉTHODE DU PAPIER CONDUCTEUR

Le modèle analogique est découpé dans une feuille de papier spécial conducteur, suivant la forme géométrique prise par le domaine de l'écoulement à l'instant considéré t . L'imposition des conditions aux limites est réalisée comme il a été indiqué au chapitre premier.

Il est intéressant d'utiliser l'équation (2), établie plus haut :

$$(2) \quad \frac{\varepsilon}{K} \cdot h'_t = -\varphi'_n \frac{1}{\cos \theta}.$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$(2') \quad h' \tau = - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

où $\psi(x, \tau)$ est le flux qui traverse la surface libre, car la détermination de $\partial \psi / \partial x$ revient à mesurer l'intensité qui entre dans le modèle par l'électrode considérée : il n'est plus besoin de tenir compte de la pente de la surface libre.

On opère pratiquement en entaillant le modèle suivant des lignes verticales encadrant chaque électrode (*fig. 77*), ce qui permet de passer d'une position de la surface libre à une autre sans changer de modèle, par simple prolongation des entailles. On règle le potentiel φ_1 de chaque électrode de telle façon que le potentiel φ sur la surface libre, à la base de la languette de papier portant l'électrode considérée, soit égal à z . Les languettes de papier doivent être assez étroites pour bien représenter la surface libre, surtout si celle-ci a une forte pente.

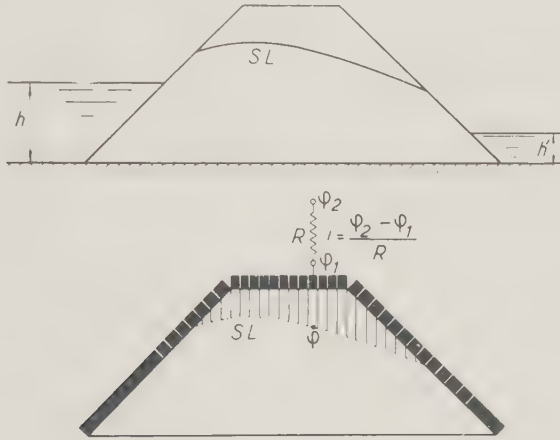


Fig. 77

B. — MÉTHODE DES RÉSEAUX

Les réseaux électriques à conductances amovibles permettent de réaliser commodément les modèles analogiques correspondant aux différentes positions de la surface libre, d'autant plus que le passage d'un modèle à l'autre ne nécessite qu'une modification très partielle du réseau. D'autre part, les conditions à imposer sur la surface libre, dans le cas d'un mouvement non permanent, sont du type de DIRICHLET, puisque l'on connaît la position de cette surface, et que l'on a $\varphi = z$. Les « brins » coupés du réseau ont des résistances proportionnelles à leurs longueurs, et leurs extrémités sont portées à des potentiels connus.

Le nombre d'opérations à effectuer est toutefois assez important. Pour chaque nœud situé sur la surface libre, il faut, lors de la modification du modèle :

- placer une résistance proportionnelle à la longueur du « brin » coupé;
- imposer à son extrémité un potentiel $\varphi = z$;

déterminer la valeur de φ'_z ou de φ'_x , suivant que l'on utilise la relation (3') ou (3''). Il faut, pour cela, relever le potentiel en trois nœuds consécutifs alignés, et utiliser la formule d'interpolation (22) du chapitre II;

- calculer h'_l et déterminer la correction à apporter;
- déterminer la nouvelle position de la surface libre.

Il peut y avoir une dizaine d'étapes à considérer au cours du mouvement de la surface libre, avec une dizaine de nœuds pour chacune, ce qui fait une centaine de séries d'opérations indiquées ci-dessus. Aussi, est-il intéressant de simplifier ces opérations par les moyens suivants :

1. — Détermination de la surface libre à une fraction de maille près.

Si la hauteur du modèle est d'une dizaine de mailles, on peut se contenter de déterminer la position de la surface libre à 1/20 de maille près (en opérant sur du papier millimétré, par exemple), ce qui correspond à 1/200 de la hauteur du modèle. Cette précision suffit largement. On peut alors disposer d'un jeu de vingt valeurs de résistances, correspondant aux vingt valeurs possibles de la longueur β des brins coupés.

2. — Imposition des potentiels sans réglages.

L'imposition des potentiels sur la frontière d'un modèle au moyen de potentiomètres nécessite une ou plusieurs séries de réglages par opposition avec un pont étalonné. Afin de supprimer ces réglages, j'ai réalisé un diviseur de tension à deux cents points, permettant d'obtenir directement toutes les valeurs nécessaires du potentiel : ces valeurs de limitent à deux cents puisqu'en tout point de la surface libre, le potentiel a la même définition que la cote du point considéré.

Les intensités prélevées aux diverses bornes du diviseur de tension doivent être négligeables devant l'intensité principale qui le traverse, ce qui exige que la résistance du diviseur soit très faible. Le diviseur utilisé a une résistance de l'ordre de 1 ohm, et est réalisé par deux cents résistances en série de 1/200 d'ohm chacune. Chaque résistance, constituée par une bande de clinquant de cuivre de 5/100 de millimètre d'épaisseur, a été ajustée par découpage à froid. Les potentiels ainsi fournis sont précis à 1/1 000 près (¹).

3. — Utilisation d'un tableau de coefficients pour le calcul de φ'_z .

En appelant φ_0 la valeur du potentiel en un nœud situé sur la surface libre, et φ_1 et φ_2 ses valeurs aux nœuds voisins situés sur la même verticale, aux distances β et $1 + \beta$ (voir *fig.* 78), la hauteur de la maille non coupée étant supposée égale à 1, on a :

$$(22) \quad (\varphi'_z)_0 = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2,$$

(1) L'emploi de cet appareil n'est évidemment pas limité aux problèmes envisagés ici : il peut être utilisé pour toute imposition de potentiels, aussi bien à la cuve rhéoelectrique qu'au réseau, chaque fois que la définition de ces potentiels ne dépasse pas quelques millièmes de l'échelle totale.

avec :

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{1 + 2\beta}{\beta(1 + \beta)}, \\ a_1 &= \frac{1 + \beta}{\beta}, \\ a_2 &= \frac{\beta}{1 + \beta}. \end{aligned} \right.$$

Comme les différentes valeurs possibles de β sont au nombre de vingt, on peut dresser un tableau des valeurs correspondantes de a_0 , a_1 et a_2 : l'expression (22) de φ'_z se calcule alors rapidement.

1. — Calculateur analogique.

L'utilisation d'un calculateur analogique auxiliaire peut être d'un grand intérêt pratique pour la détermination de h'_t . Un projet d'un tel calculateur (1), dû à J. MIROUX

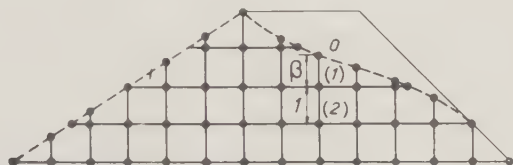


Fig. 78

$$(\varphi'_z)_0 = \frac{1 + 2\beta}{\beta(1 + \beta)} \varphi_0 + \frac{1 + \beta}{\beta} \varphi_1 + \frac{\beta}{1 + \beta} \varphi_2$$

ingénieur à l'O.N.E.R.A., est représenté *figure 79*. Les potentiels φ_0 , φ_1 et φ_2 sont prélevés directement sur le réseau, aux nœuds intéressés, par trois « sondes ». Des amplificateurs opérationnels (réf. [11]), de rapports respectifs -1 , $+1$ et -1 , les imposent aux extrémités de trois diviseurs de tensions D_0 , D_1 et D_2 , de rapports a_0 , a_1 et a_2 , dont les autres extrémités sont à zéro. Les trois potentiels $-a_0\varphi_0$, $a_1\varphi_1$ et $-a_2\varphi_2$ ainsi obtenus sont additionnés par un amplificateur opérationnel à trois entrées, et le potentiel résultant en S fournit la dérivée φ'_z . On le multiplie ensuite par $1 + h'^2_x$ au moyen d'un diviseur de tension et l'on ajoute la tension h'^2_x prise sur un potentiomètre P. On obtient donc finalement, sous forme d'une tension électrique que l'on mesure par opposition, la vitesse de déplacement vertical donnée par l'expression (3').

Les curseurs C_0 , C_1 , C_2 des diviseurs D_0 , D_1 , D_2 font partie d'un même commutateur à plots (D), à vingt positions : on peut réaliser ainsi les vingt valeurs des coefficients a_0 , a_1 et a_2 , correspondant aux vingt valeurs possibles de la longueur β du « brin coupé ». D'autre part, le diviseur de rapport $(h'_x)^2$ et le potentiomètre P fournissant la tension $(h'_x)^2$, font partie d'un autre commutateur à vingt positions, correspondant

(1) Seul, un montage sur table de cet appareil a été réalisé, ce qui ne nous a pas permis de l'utiliser pour les expériences décrites plus loin. Sa construction définitive, qui nécessite des diviseurs de tension précis, doit être réalisée ultérieurement.

à vingt valeurs de la pente de la surface libre, choisies entre 0 et 1. Si la pente est supérieure à 1, on emploie la relation (3'') que l'on peut écrire sous la forme :

$$U = -\varphi'_x (1 + q^2) + q,$$

où l'on a $U = h'_x / \text{tg } \theta =$ vitesse de déplacement horizontal de la surface libre, et $q = (h'_x)^{-1} = \cotg \theta$. Cette relation est presque semblable à (3') : il suffit d'échanger les axes horizontal et vertical. Il subsiste néanmoins une différence du fait que l'on a le terme q et non q^2 : il faut alors substituer au potentiomètre P le potentiomètre linéaire Q , ce qui s'effectue par une simple commutation.

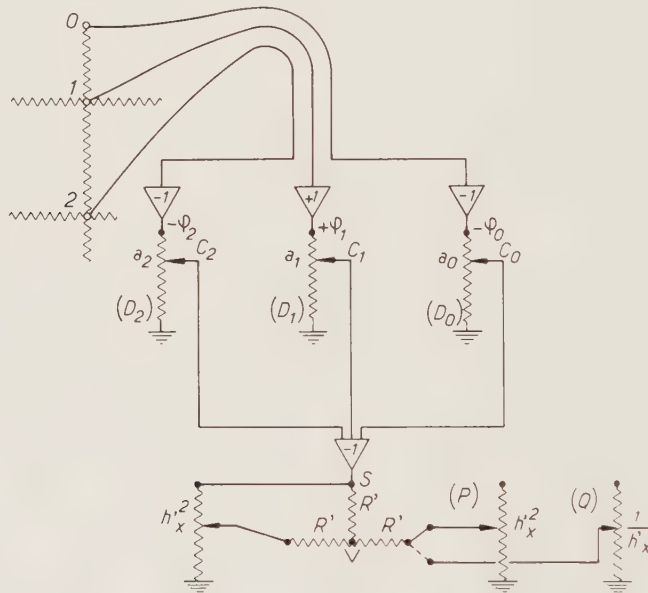


Fig. 79

L'utilisation de ce calculateur est donc fort simple : après avoir branché les trois « sondes » aux nœuds choisis 0, 1 et 2, et placé les commutateurs (D) et (P) sur les positions correspondant à β et à h'_x , on mesure sur un pont à décades, par une méthode d'opposition, la valeur de la vitesse de déplacement. Le gain de temps est considérable (1) et les risques d'erreurs dans le relevé des trois potentiels φ_0 , φ_1 et φ_2 , ainsi que dans le calcul de l'expression (3'), sont supprimés.

Par contre, des erreurs systématiques sont introduites par le calculateur lui-même (elles dépendent essentiellement de la précision des diviseurs de tension). Il n'est pas possible de définir une précision relative des résultats obtenus, l'ordre de l'erreur étant sensiblement constant, quelle que soit la valeur de la vitesse mesurée. Il est, du reste, comparable aux erreurs apportées par le réseau lui-même, du fait que la surface

(1) Pour fixer les idées, disons que la durée d'une expérience d'importance moyenne, de l'ordre d'une semaine, par exemple, peut être réduite à une journée ou deux de travail en utilisant un tel auxiliaire de calcul.

libre coupe les mailles (voir, à ce sujet, la planche II₁ du chapitre II). Ce qui est intéressant, c'est l'erreur sur le déplacement vertical de la surface libre, relativement à la hauteur totale du modèle analogique : dans les conditions habituelles d'expériences, cette erreur relative ne dépasse pas 1/200.

IV. — Résultats expérimentaux

Voici, à titre d'exemples, quelques résultats expérimentaux obtenus au moyen des réseaux. Les deux premiers sont extraits d'un article publié en 1953 (réf. [9]).

1. — Drainage d'un massif rectangulaire.

Les planches IV₁ et IV₂ représentent le drainage d'un sous-sol perméable de profondeur finie, au moyen de tranchées parallèles, qui le découpent en massifs rectangulaires. Initialement, les tranchées sont pleines d'eau et la surface libre dans le sol est horizontale, à la cote 10. On pompe alors dans les tranchées de façon à faire baisser leurs plans d'eau avec une vitesse constante V_0 , puis à les stabiliser à la cote 2. Dans cet exemple, on a pris $V_0 = 2 K/\varepsilon$.

Les points expérimentaux obtenus au réseau pour les différentes étapes de la surface libre sont indiqués sur les planches IV₁ et IV₂, les courbes continues étant obtenues par lissage dans le temps et dans l'espace. Les seuls écarts notables entre les points et les courbes sont ceux de l'étape $\tau = 15$, qui a été obtenue à partir de $\tau = 10$. L'intervalle de temps $\Delta \tau = 15 - 10 = 5$ était un peu trop élevé. Les écarts sont, du reste, presque annulés sur la courbe suivante, relative au temps $\tau = 17,5$.

2. — Vidange lente de la retenue d'un barrage zoné.

La planche IV₃ représente les différentes positions de la surface libre dans un massif zoné, au cours d'une vidange lente de la retenue. Le régime de vidange est donné par les différentes positions du plan de charge et les instants correspondants.

Le noyau central est mille fois moins perméable que la recharge amont, ce qui explique que la surface libre y reste pratiquement stationnaire à la cote 115.

La répartition du potentiel dans le noyau central, la recharge amont et le sous-sol, est représentée pour l'instant $t = 100$, correspondant à la fin de la vidange de la retenue.

3. — Vidange instantanée de la retenue d'un barrage.

La planche IV₄ représente la déformation de la surface libre dans un barrage perméable homogène et isotrope, après la vidange, supposée instantanée, de la retenue. La position initiale de la surface est celle relative à l'écoulement permanent, et la position finale, pour un temps infini, une horizontale de cote zéro.

Les planches IV₅ représentent les variations de la cote de la surface libre, en fonction du temps, pour différentes sections verticales. On peut remarquer que la courbe relative à la section (E) recoupe celle de la section (F). Il en est de même pour les sections (A) et (J), (B) et (I), (C) et (H), (D) et (G). Ceci est dû au fait que le barrage n'est pas symétrique : plus le parement est incliné, plus la surface libre descend vite.

Le maillage adopté pour le début de l'expérience (jusqu'au temps $\tau = 75$) est indiqué sur la planche IV₄ : il s'agit de très grosses mailles, ce qui n'empêche pas d'obtenir des résultats très satisfaisants pour la mesure des dérivées verticales le long de la surface libre. Ce fait est intéressant, en vue d'une utilisation de la méthode pour des problèmes tridimensionnels, sans nécessiter un nombre excessif de mailles.

Après le temps $\tau = 75$, la dimension des mailles du modèle a été divisée par deux dans le sens de la hauteur.

4. — Abaissement d'une nappe phréatique par pompage dans un puits.

Il s'agit d'une nappe d'étendue infinie et limitée inférieurement par une couche imperméable horizontale. Un puits atteignant le fond de la nappe est maintenu constamment vide par pompage. On suppose qu'à l'instant initial la nappe est horizontale et le puits vide.

Le problème est à symétrie axiale, et un réseau bidimensionnel, à résistivité décroissant linéairement avec le rayon, suffit pour représenter une section méridienne de l'écoulement. Le rayon du puits étant pris égal à 10, la nappe a une hauteur égale à 100, et elle est limitée à un rayon de 1 000. Cette limitation est justifiée, car au cours de l'expérience, la région du domaine, située à une distance de l'axe supérieure à 500, était constamment équipotentielle, à moins de 1/1 000 près de la charge totale. L'emploi de mailles rectangulaires inégales a permis de représenter la distance 1 000 à l'aide de vingt mailles seulement, la longueur de ces dernières variant de 10 (près du puits), à 100 (pour les régions éloignées de l'axe). Le schéma du réseau est représenté planche IV₇.

La planche IV₆ représente la répartition du potentiel autour du puits à l'instant initial : on voit que le domaine est pratiquement équipotentiel à cet instant, pour tout point situé à plus de 350 de l'axe (à moins de 1/1 000 près).

Sur la planche IV₇ sont indiquées les différentes positions de la surface libre en fonction du temps. Si, théoriquement, cette surface s'abaisse en tout point, quelle que soit la distance de l'axe, ses déplacements ne sont pratiquement plus sensibles au-delà d'un certain rayon, la vitesse de déplacement vertical décroissant très rapidement quand on s'éloigne de l'axe. Dans cette expérience, la précision géométrique pour définir la surface libre est limitée à 0,05, soit 1/200 de la hauteur de charge : on peut ainsi définir un certain rayon d'influence r_a , relatif à l'effet du puits sur la nappe phréatique. Ce rayon r_a croît avec le temps et, dans le cas étudié, est sensiblement de la forme :

$$(24) \quad r_a = 200 \log_{10} \tau.$$

Il est à noter que ce rayon d'influence n'a aucun rapport avec les effets d'inertie, qui sont négligés ici.

D'autre part, le déplacement de la surface libre au voisinage du puits devient très lent vers le temps $\tau = 500$. Les vitesses mesurées après ce temps sur le modèle analogue, très faibles, étaient de l'ordre de la précision des mesures, et l'expérience n'a pu être continuée.

On peut donc résumer ainsi l'effet du pompage dans un puits sur la position de la nappe phréatique :

- a) existence d'un « rayon d'influence pratique » qui croît avec le temps;
- b) pseudo-stabilisation de la nappe au voisinage du puits au bout d'un certain temps.

Sur la planche IV₇ est indiquée en pointillés, à titre de comparaison, la position de la surface libre relative à un écoulement permanent entre un réservoir concentrique au puits et le puits lui-même, les hauteurs des plans de charges étant respectivement 100 et 0. Le rayon du réservoir concentrique est de 500, c'est-à-dire égal au rayon d'influence défini plus haut, relatif au temps $\tau = 500$. La différence entre la position de la surface libre de l'écoulement non permanent au temps $\tau = 500$ et celle de l'écoulement stationnaire est sensible, son maximum, dans le sens vertical, atteignant 7.

La répartition du potentiel, dans le cas de l'écoulement permanent indiqué, est représentée planche IV₈.

V. — Conclusions

Les quelques exemples qui précèdent montrent la variété de formes et de conditions aux limites des problèmes d'écoulements non permanents pouvant être résolus par la méthode des analogies électriques.

Les hypothèses simplificatrices principales sur lesquelles repose cette méthode sont, d'une part, les valeurs négligeables des effets d'inertie et, d'autre part, l'absence de frange capillaire à la surface libre de l'écoulement. La première hypothèse semble devoir être très justifiée, tout au moins pour un grand nombre de cas pratiques, si l'on en juge par la littérature relative à ce sujet. La seconde hypothèse, relative à la capillarité, peut prêter davantage à la critique (cf., à ce sujet, la discussion de la réf. [9]). Dans le cas des écoulements permanents, l'influence de la frange capillaire est couramment négligée, son rôle se bornant à créer une zone d'écoulement parallèle à l'écoulement principal, avec une valeur de la perméabilité plus ou moins faible. Par contre, dans le cas d'une surface libre qui s'abaisse, la rétention d'eau dans les pores peut modifier sensiblement la vitesse de descente de la surface libre. Il ne semble pas impossible, néanmoins, de pouvoir tenir compte de ces effets, en modifiant de façon appropriée les conditions aux limites sur la surface libre.

Entre l'hypothèse très simple de HUGUES et HABIB (réf. [4]), qui admettent que le potentiel sur la surface libre est égal à :

$$z - h_c,$$

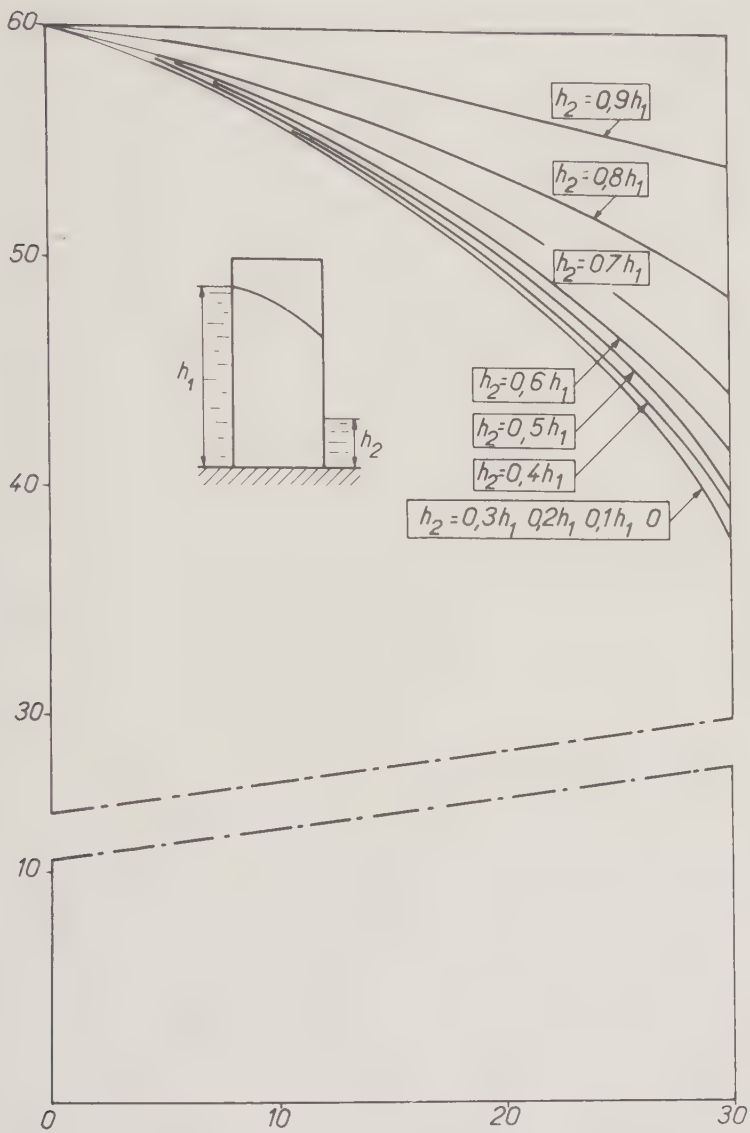
h_c étant la hauteur d'ascension capillaire du liquide dans le terrain considéré, et les résultats complexes des expériences de LAMB (réf. [10]), qui tiennent compte de trois

effets différents de la capillarité selon qu'il s'agit d'un mouvement ascendant, descendant ou horizontal, on peut espérer trouver une condition simple, représentant, d'une façon satisfaisante, l'action de la capillarité, par comparaison de résultats sur modèles analogiques et sur modèles hydrauliques.

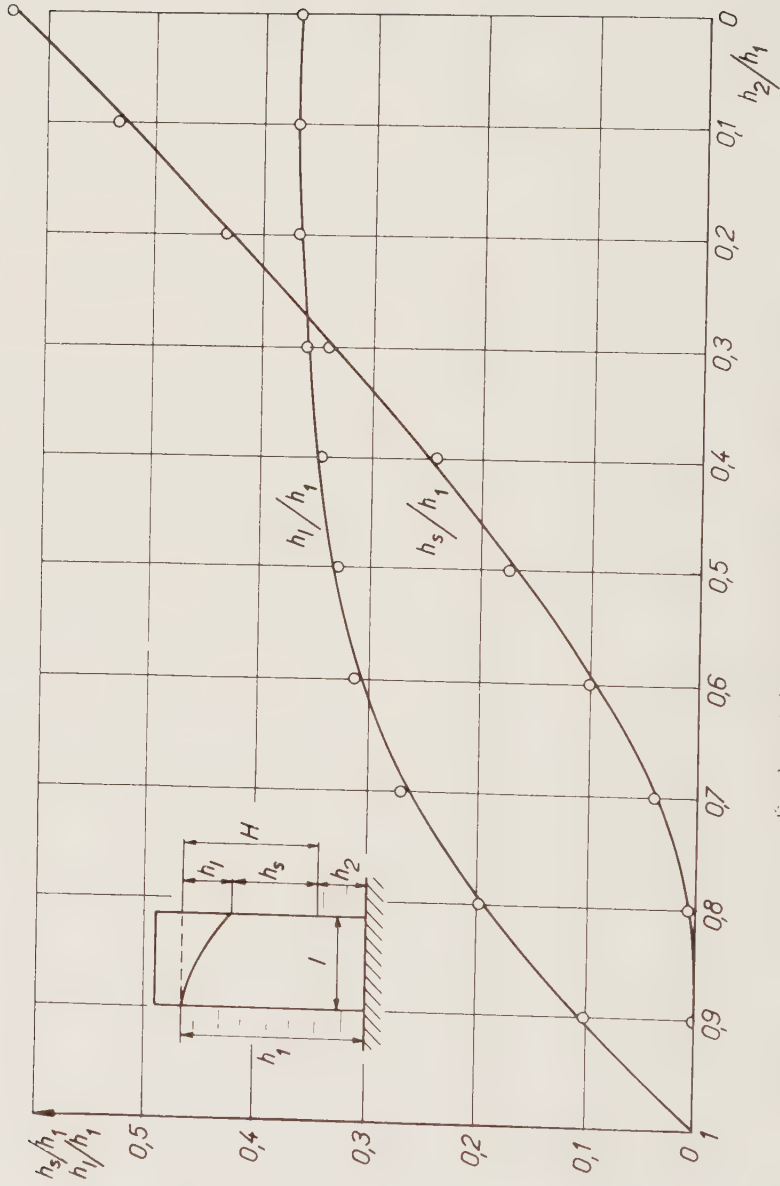
Notons enfin que les réseaux électriques pourraient être avantageusement remplacés, dans l'étude du mouvement des surfaces libres, par des réseaux hydrauliques dont les branches seraient constituées par des tubes capillaires. Les hypothèses de fonctionnement seraient les mêmes que pour les réseaux électriques (débit dans une branche proportionnel à la différence de potentiel entre les deux nœuds ou extrémités de la branche). Par contre, le déplacement de la « surface libre » s'effectuerait automatiquement sous l'influence des conditions aux limites hydrauliques imposées au modèle, et il suffirait alors de l'enregistrer, en le filmant, par exemple. Des effets de capillarité à la surface libre pourraient être pris en compte, suivant la tension du liquide employé. D'autre part, la configuration de l'écoulement, à des instants choisis, pourrait être déterminée avec précision sur un modèle analogique électrique, les positions de la surface libre relatives à ces instants étant fournies par le modèle hydraulique.

On peut réaliser simplement de tels réseaux hydrauliques à deux dimensions en creusant dans une plaque de plexiglas assez épaisse, à l'aide d'une scie circulaire, des sillons horizontaux et verticaux, de 5 mm de profondeur et de 5/10 de millimètre de largeur, l'intervalle entre chaque sillon étant de 2 à 3 mm. On colle ensuite une seconde plaque, non gravée, sur la première. Des essais sont en cours pour le choix du liquide à employer.

PLANCHES I₁ A IV₈

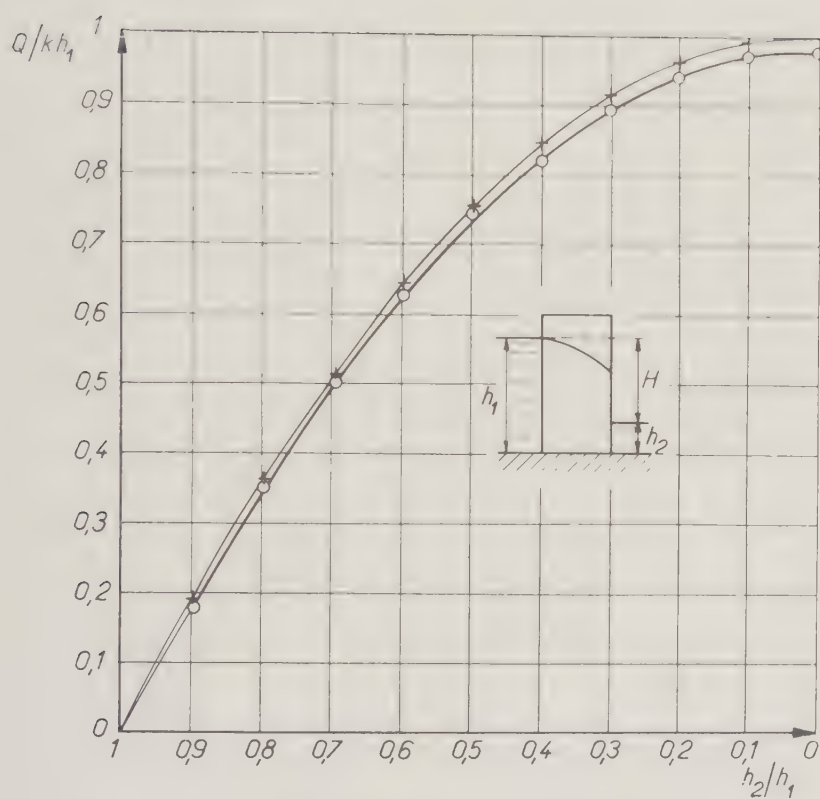
PLANCHE I₁

Écoulement dans une digue à parois verticales
Positions de la surface libre pour différents niveaux du bassin aval

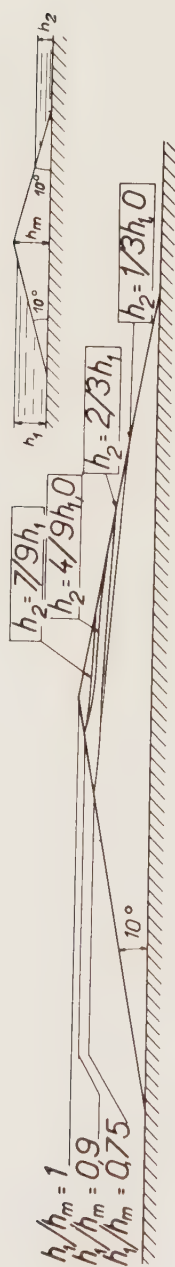
PLANCHE I₂

Écoulement dans une digue à parois verticales
Variation de la hauteur de suintement en fonction du niveau aval

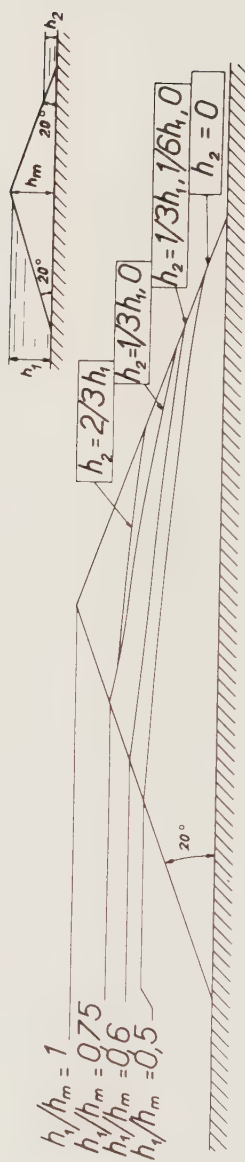
PLANCHE I₃



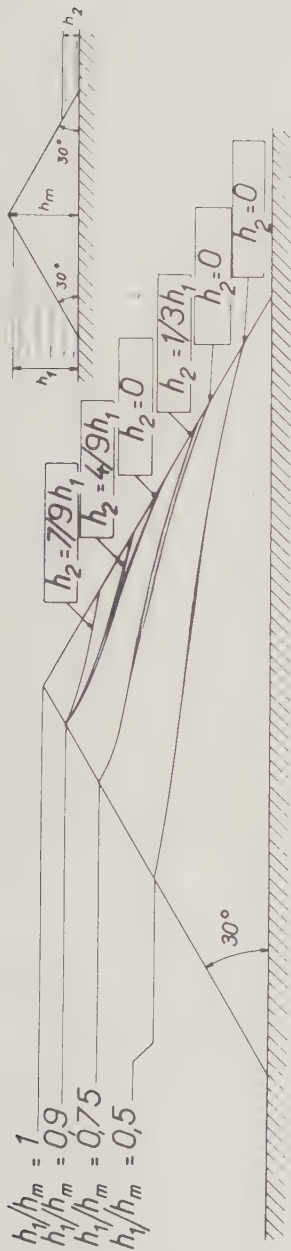
Écoulement dans une digue à parois verticales
 Variation du débit en fonction du niveau aval
 Q = débit par unité d'épaisseur de digue
 : courbe théorique; ○ : courbe expérimentale

PLANCHE I₄ a

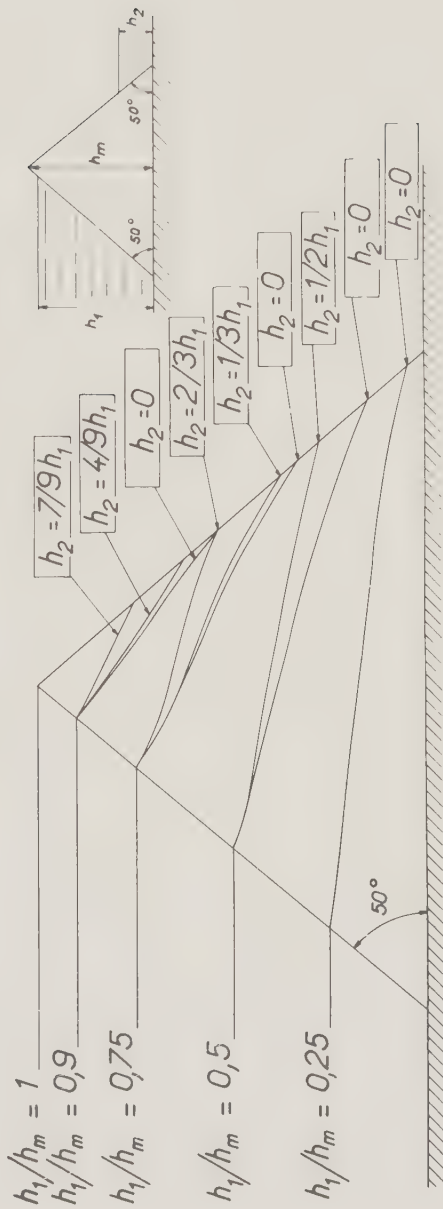
Écoulement dans une digue à parois inclinées symétriques
Positions de la surface libre pour différents niveaux des bassins amont et aval

PLANCHE I₄ b

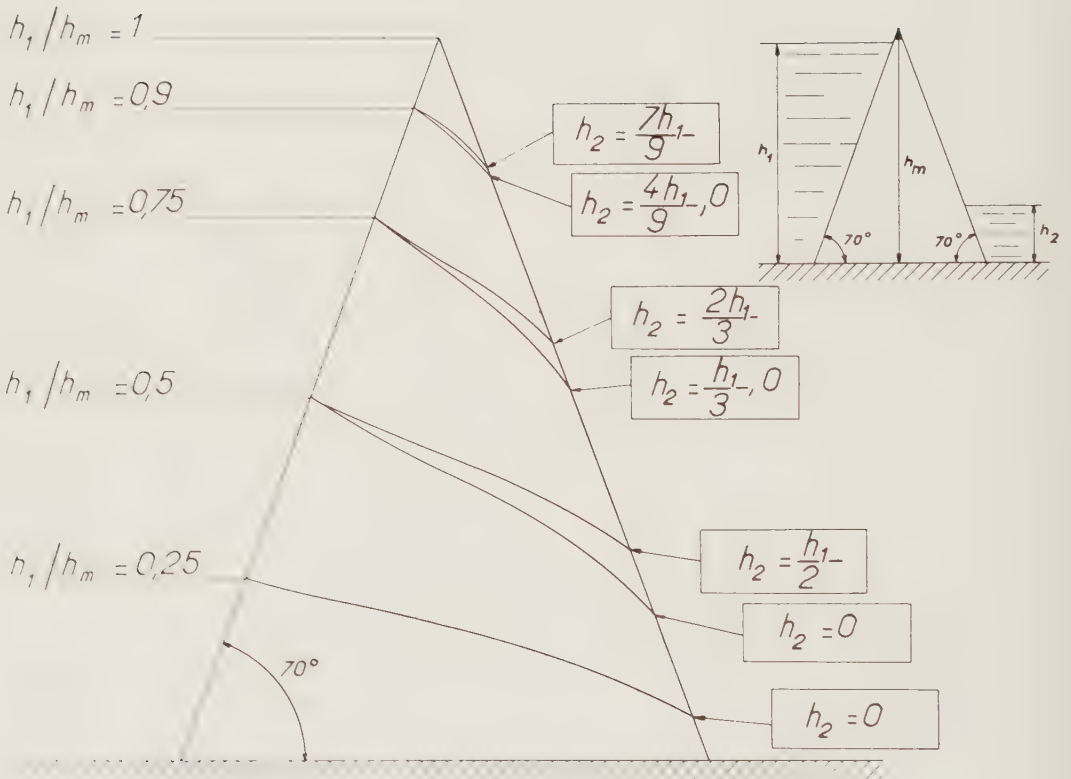
Écoulement dans une digue à parois inclinées symétriques
Positions de la surface libre pour différents niveaux des bassins amont et aval



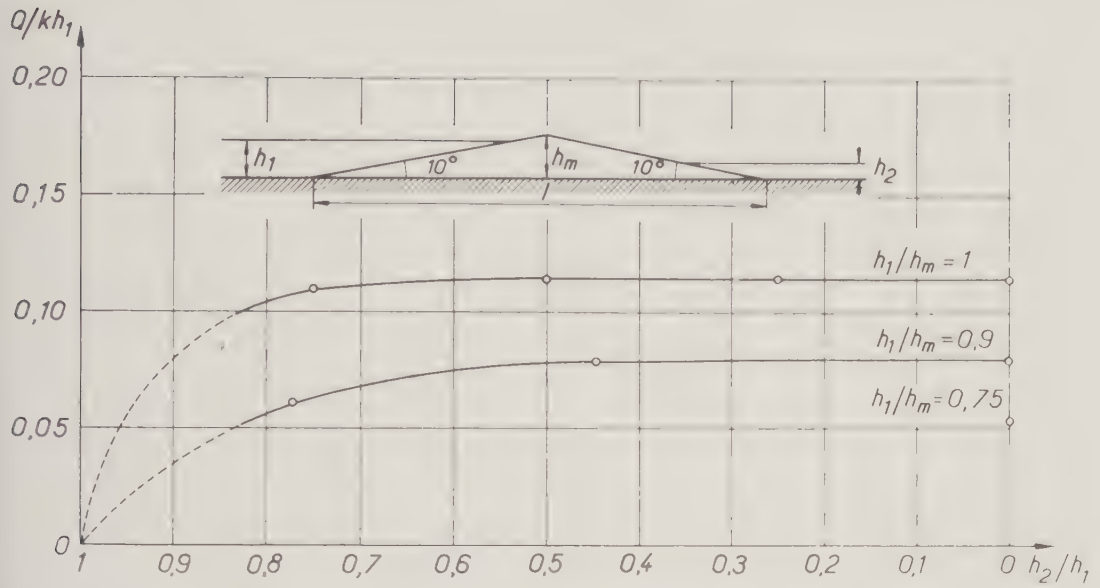
Écoulement dans une digue à parois inclinées symétriques
Positions de la surface libre pour différents niveaux des bassins amont et aval



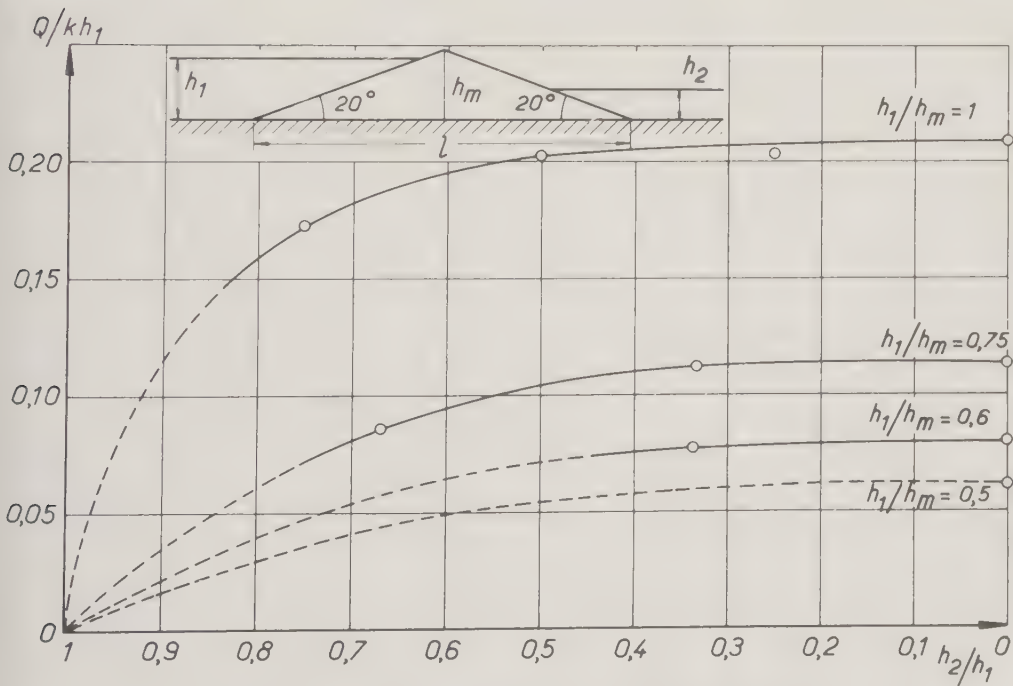
Écoulement dans une digue à parois inclinées symétriques
Positions de la surface libre pour différents niveaux des bassins amont et aval

PLANCHE I₄ e

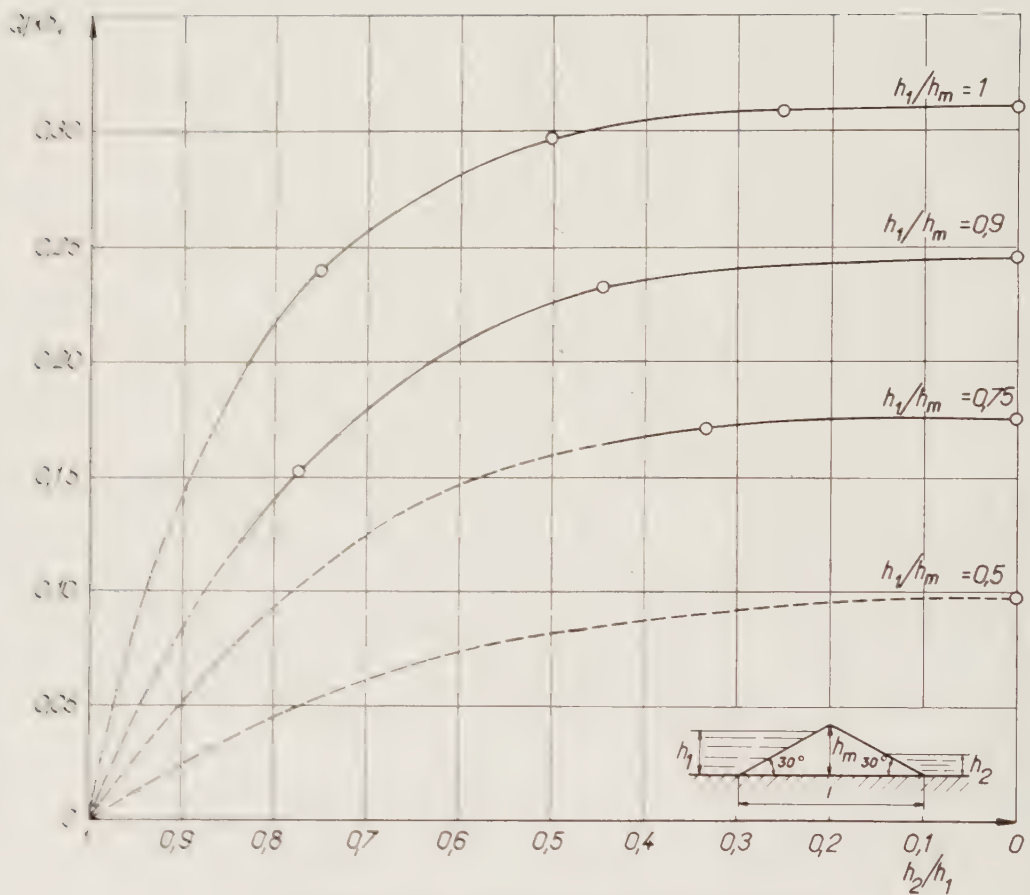
Écoulement dans une digue à parois inclinées symétriques
 Positions de la surface libre pour différents niveaux des bassins amont et aval

PLANCHE I₅ a

Écoulement dans une digue à parois inclinées symétriques
Variations du débit en fonction des niveaux des bassins amont et aval

PLANCHE I₅ b

Écoulement dans une digue à parois inclinées symétriques
Variations du débit en fonction des niveaux des bassins amont et aval

PLANCHE I₅ c

Ecoulement dans une digue à parois inclinées symétriques
Variations du débit en fonction des niveaux des bassins amont et aval

PLANCHE I₅ d

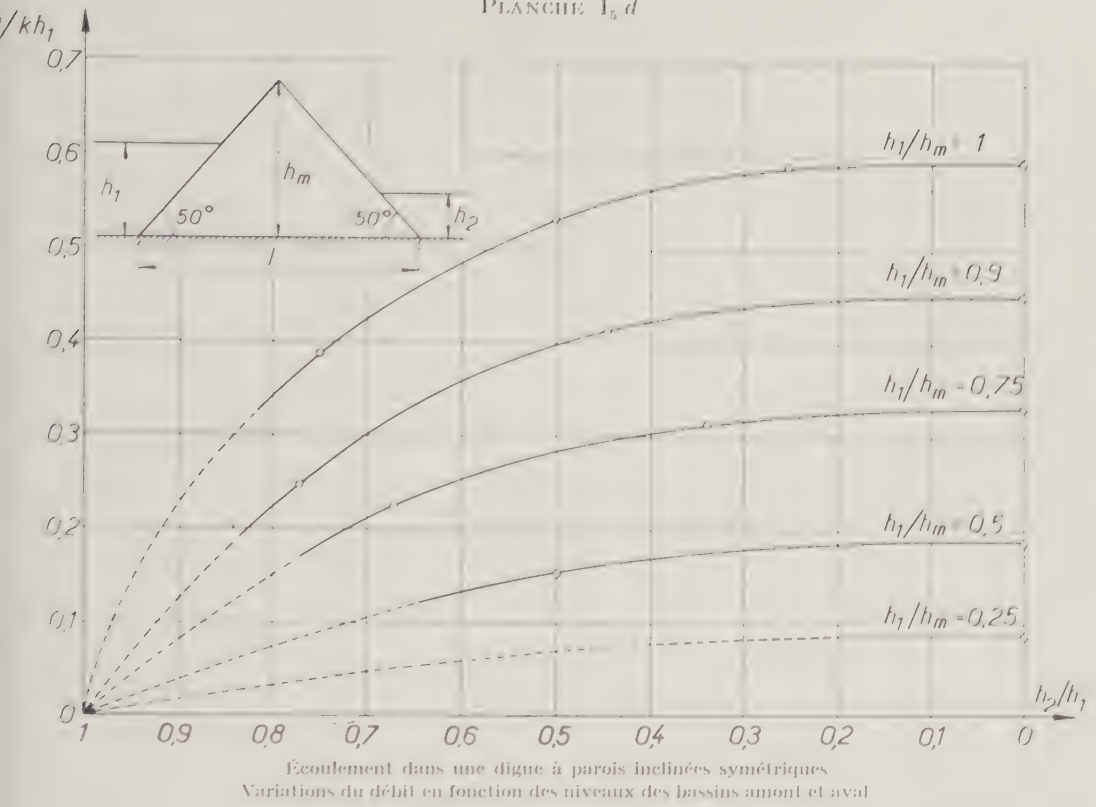


PLANCHE I₅ e

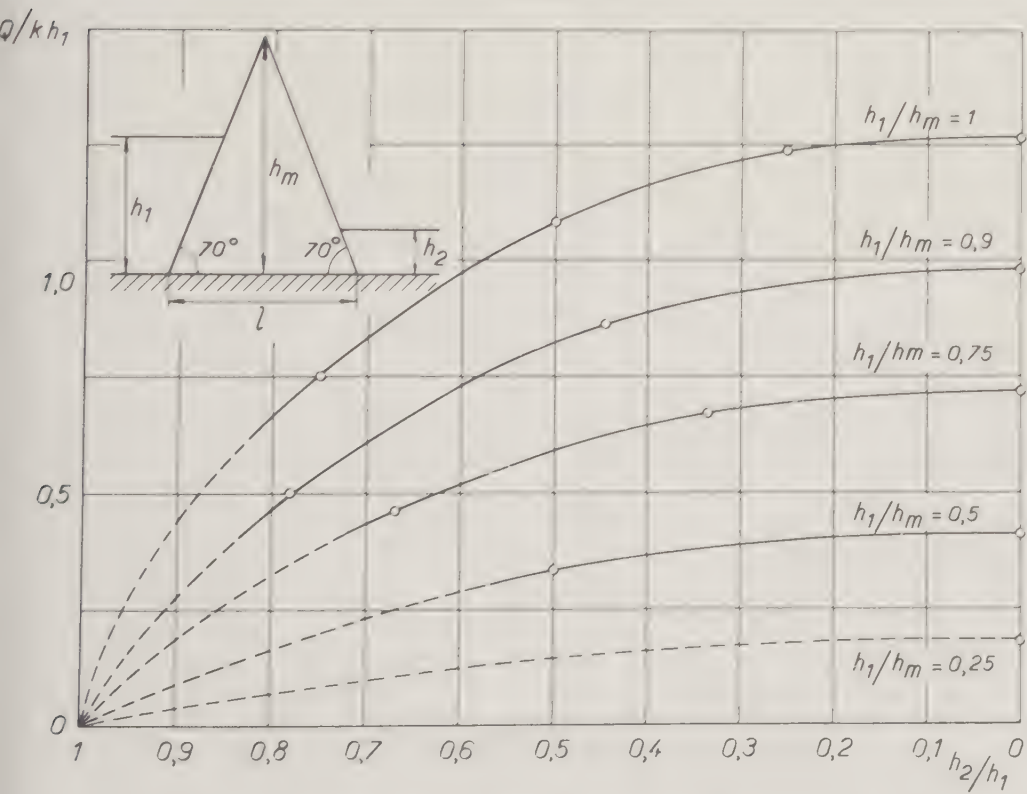
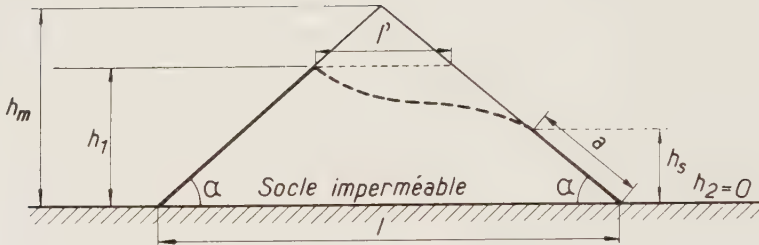


PLANCHE I₆



Comparaison des formules de débit dans les digues à parois inclinées symétriques avec un bassin aval de niveau nul

h_1/h_m	Q/Kh_1	I		II		III		α
1	0,116	0,104	— 10 %	0,088	— 24 %	0,082	— 29 %	10°
0,9	0,0804	0,0822	+ 2 %	0,072	— 10 %	0,0662	— 18 %	
0,75	0,0556	0,0579	+ 4 %	0,528	— 5 %	0,0478	— 14 %	
1	0,210	0,204	— 3 %	0,182	— 13 %	0,168	— 20 %	20°
0,75	0,1145	0,115	0,5 %	0,109	— 4,5 %	0,099	— 14 %	
0,6	0,0810	0,080	— 1 %	0,078	— 4 %	0,072	— 11 %	
0,5	0,0620	0,0615	— 1 %	0,061	— 2,5 %	0,057	— 8 %	
1	0,311	0,309	+ 1,5 %	0,289	— 7 %	0,256	— 18 %	30°
0,9	0,244	0,247	+ 1 %	0,236	— 3 %	0,207	— 15 %	
0,75	0,175	0,176	+ 0,5 %	0,173	— 1 %	0,154	— 12 %	
0,5	0,096	0,095	— 1 %	0,096	0 %	0,088	— 6 %	
1	0,596	0,581	— 2,5 %	0,596	0 %	0,458	— 23 %	50°
0,9	0,451	0,469	+ 4 %	0,487	+ 8 %	0,391	— 13 %	
0,75	0,330	0,3385	+ 2,5 %	0,358	+ 8 %	0,303	— 8 %	
0,5	0,185	0,184	— 0,5 %	0,198	+ 7 %	0,181	— 2 %	
0,25	0,0852	0,078	— 8 %	0,0852	0 %	0,0816	— 4 %	
1	1,271	1,231	— 3 %	1,372	+ 8 %	1,056	— 17 %	70°
0,9	0,986	1,00	+ 1,5 %	1,122	+ 14 %	0,902	— 8,5 %	
0,75	0,721	0,730	+ 1 %	0,823	+ 14 %	0,698	— 3 %	
0,5	0,414	0,402	— 3 %	0,457	+ 10 %	0,416	+ 0,5 %	
0,25	0,182	0,172	— 5,5 %	0,196	+ 8 %	0,188	+ 3 %	

Colonne I : valeurs de $\frac{h_1}{(0,8 + 0,0045 \alpha^2) L + 1,18 L'}$;

Colonne II : valeurs de $\frac{h_1}{L + L'}$;

Colonne III : valeurs de $\frac{a \sin^2 \alpha}{h_1}$ pour $\alpha \leq 30^\circ$;
 $\frac{h_1}{2d}$ pour $\alpha > 30^\circ$.

PLANCHE I₇ a

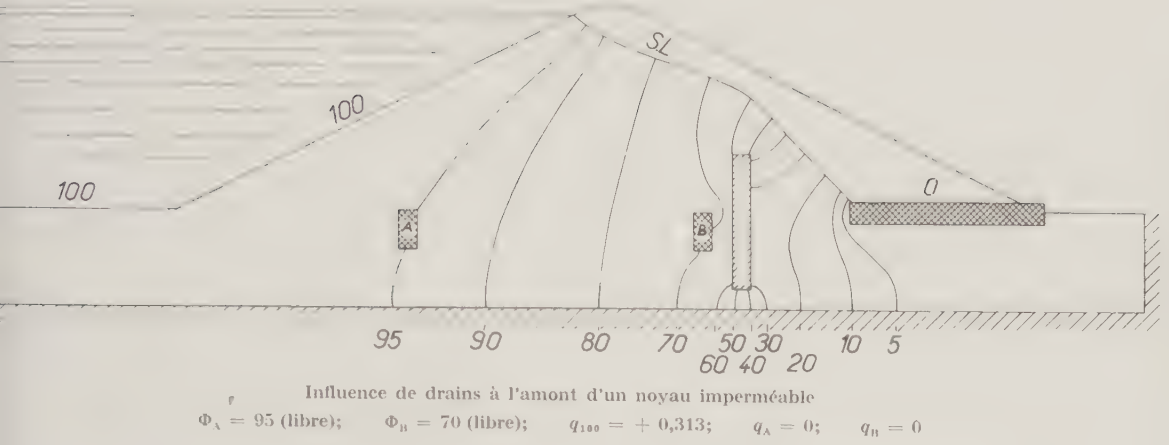


PLANCHE I₇ b

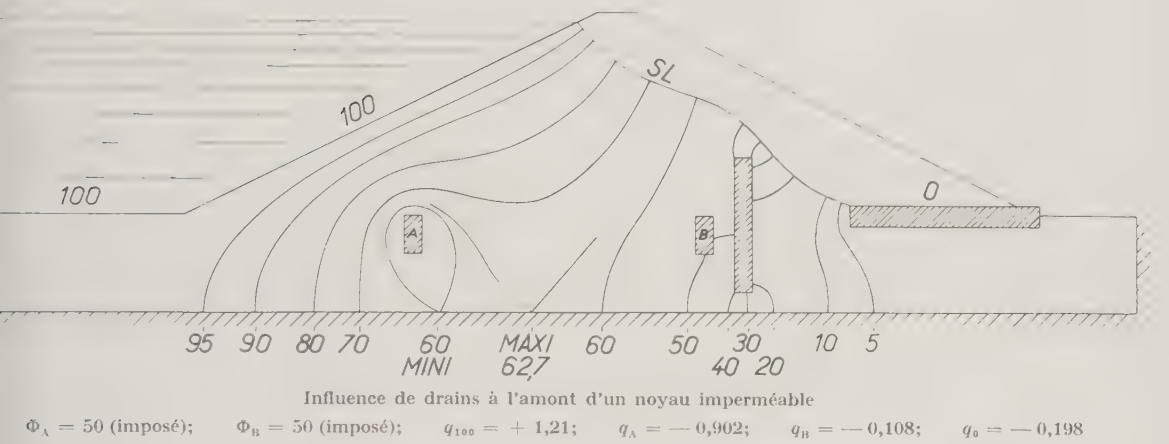


PLANCHE I₇ c

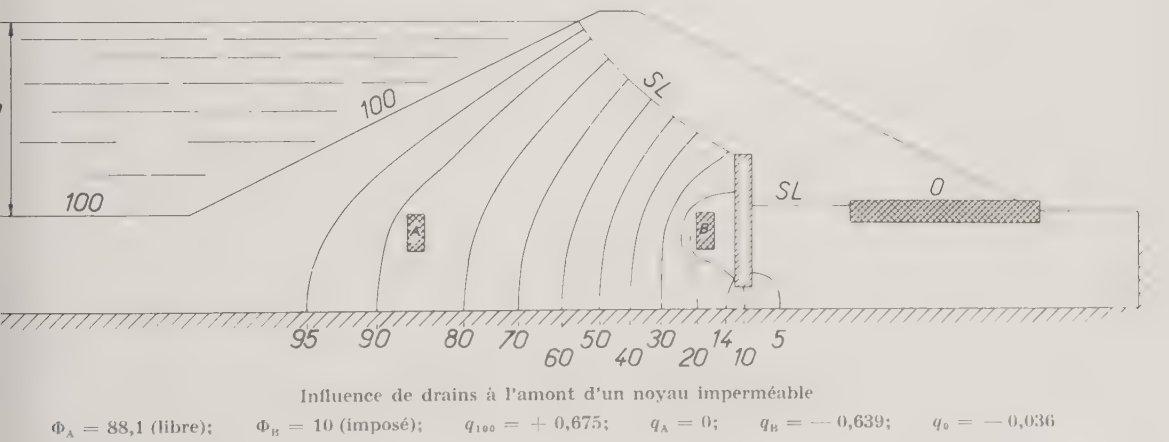
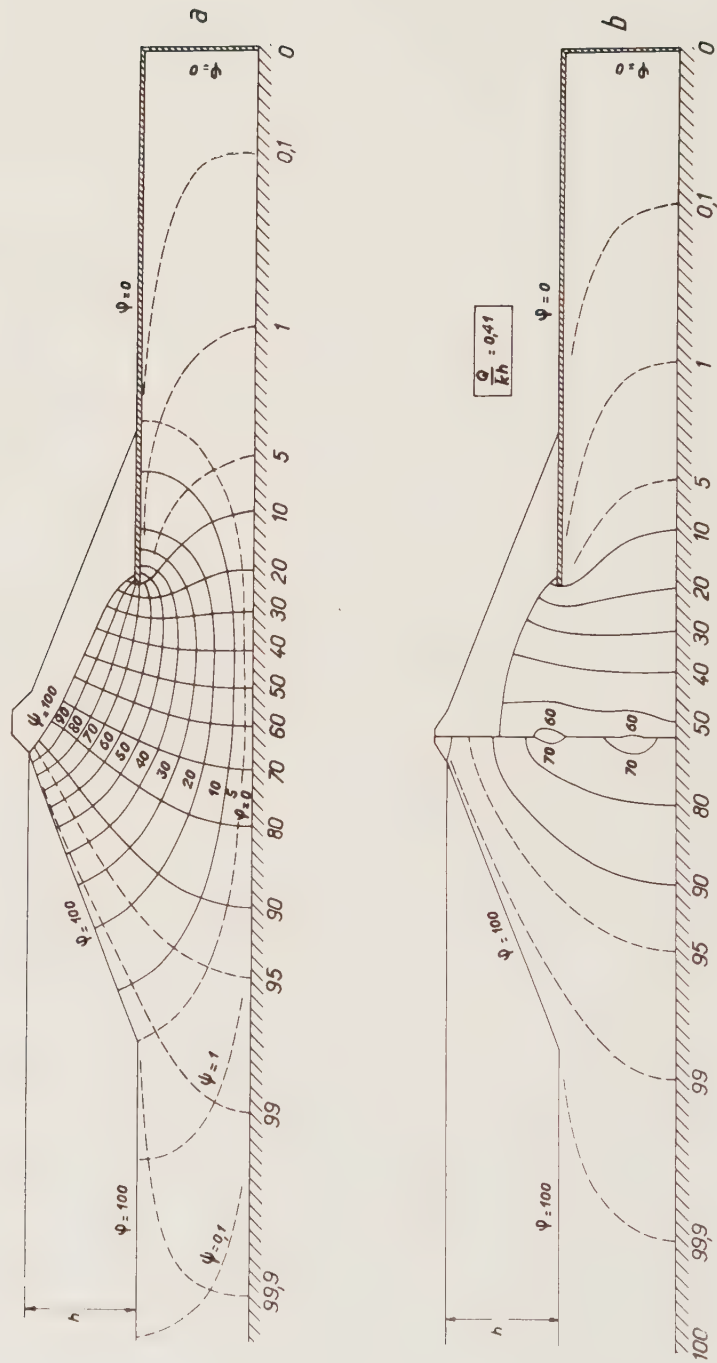
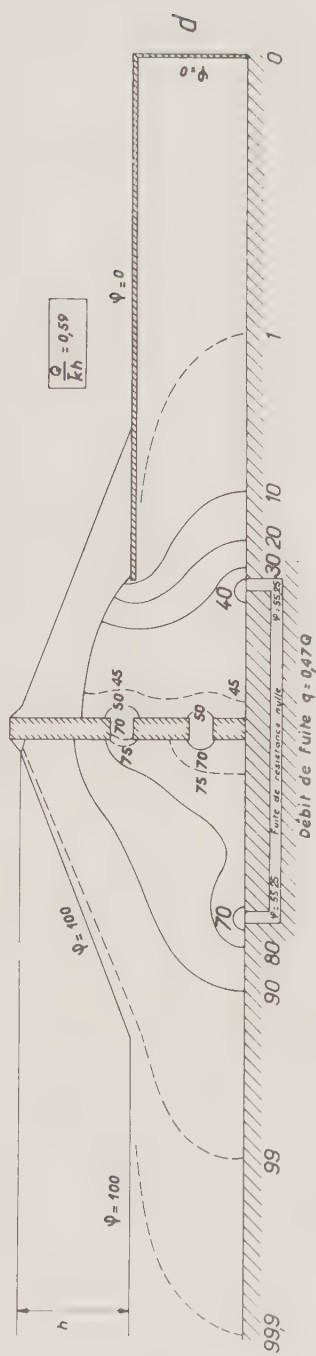
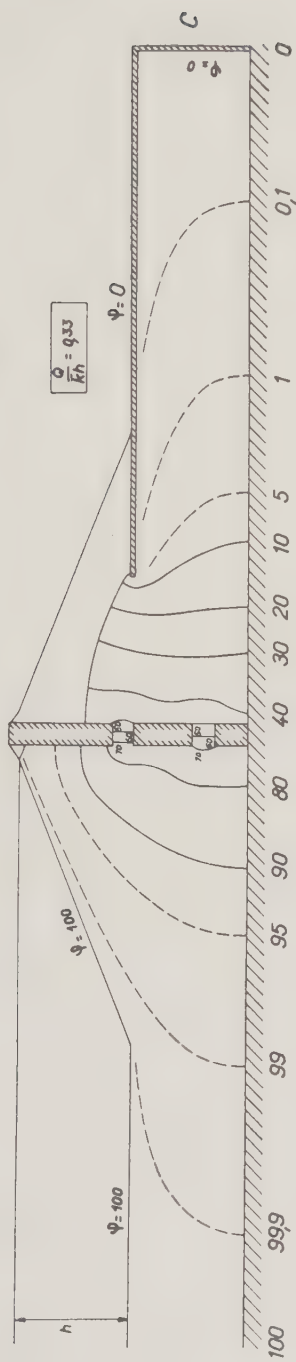


PLANCHE I₈



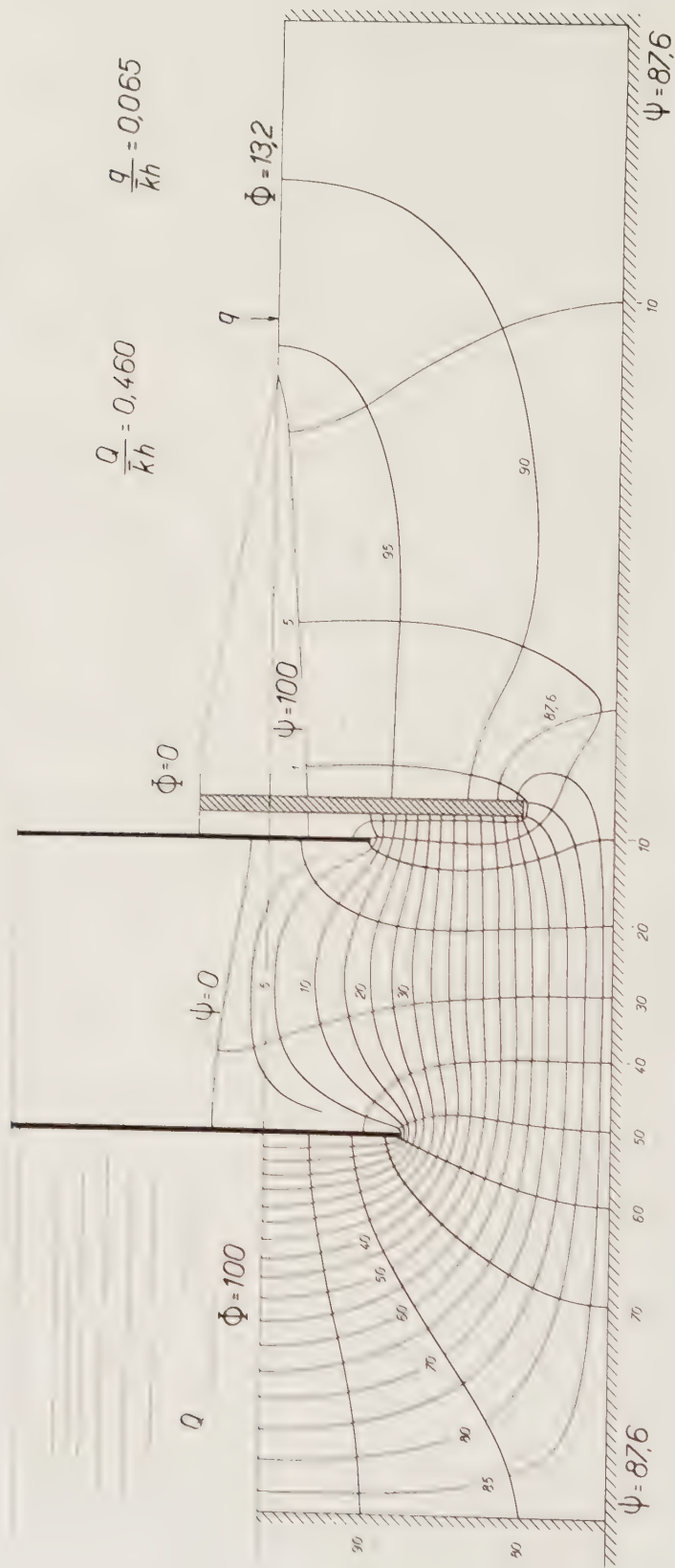
Influence de fuites dans des rideaux d'éclanchéité

PLANCHE I₈ (suite)



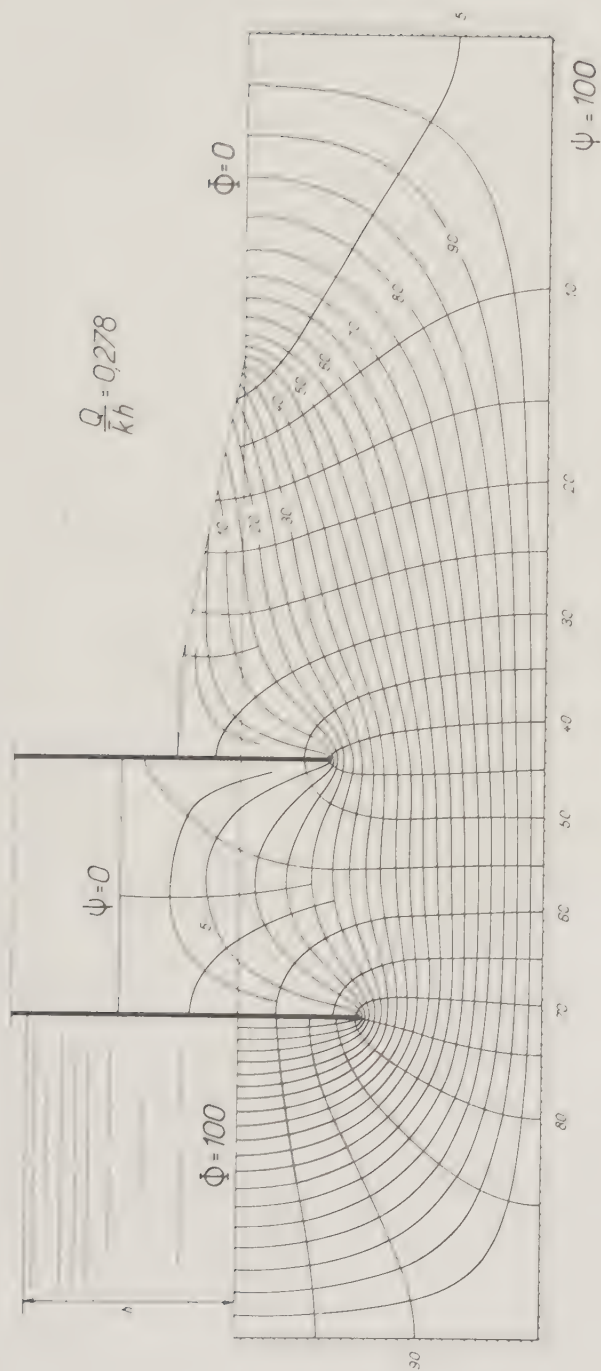
Influence de fuites dans des rideaux d'étanchéité

PLANCHE I₉

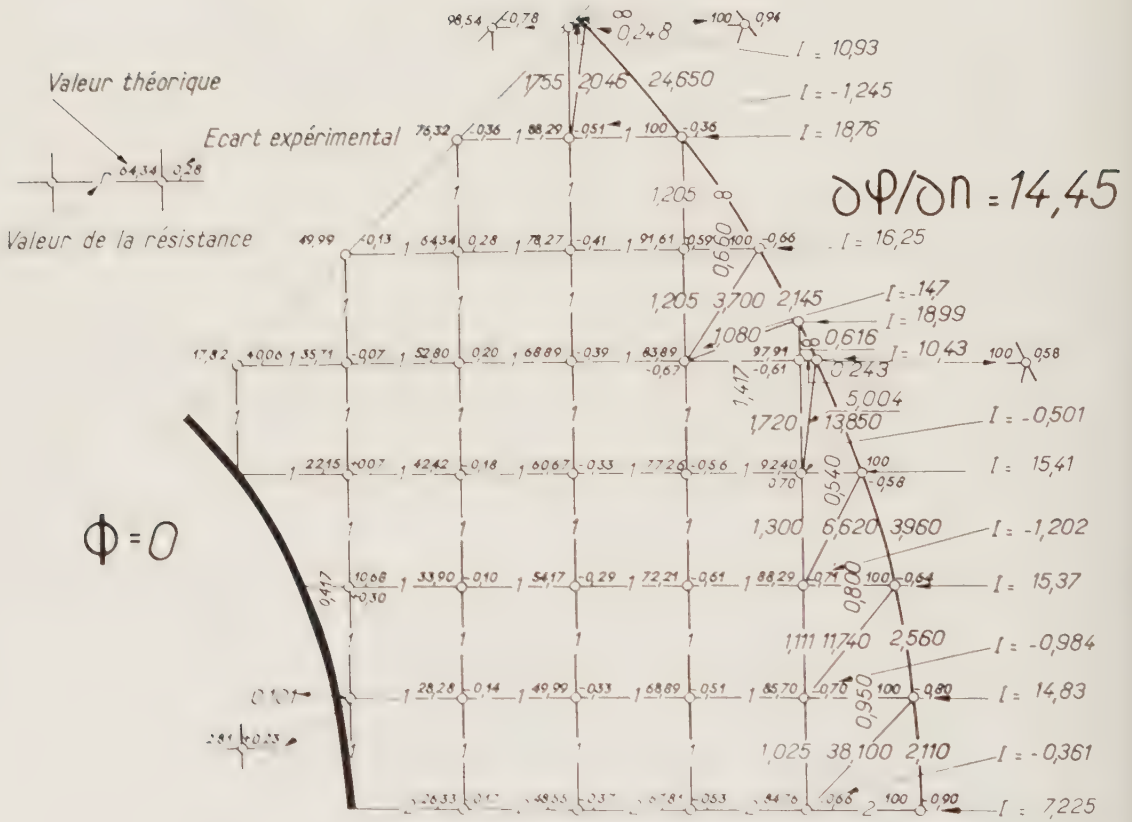


Écoulement sous un batardeau (avec puits filtrants)

PLANCH I₁₀

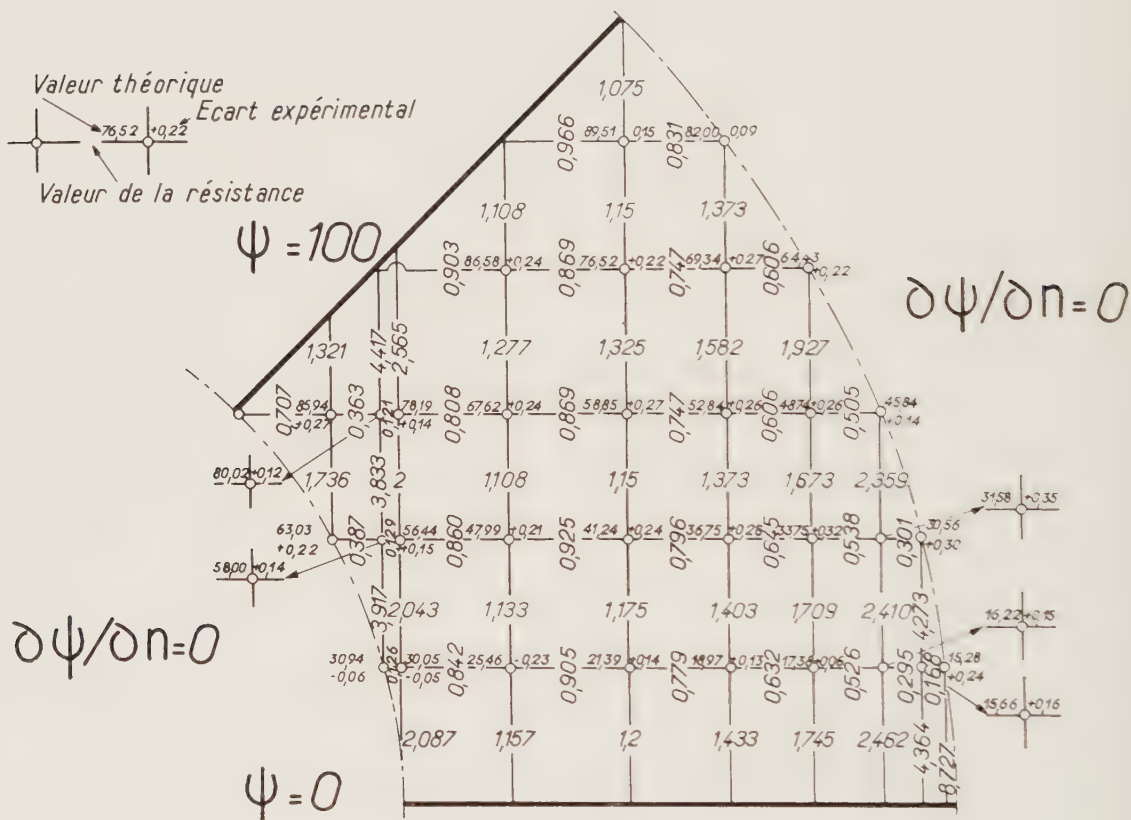


Ecoulement sous un barrage

PLANCHE II₃

Imposition de conditions de NEUMANN sur un réseau
 Comparaison des résultats expérimentaux aux valeurs théoriques

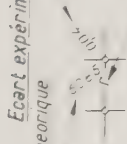
PLANCHE II₅



Imposition de conditions de NEUMANN sur un réseau
Comparaison des résultats expérimentaux aux valeurs théoriques

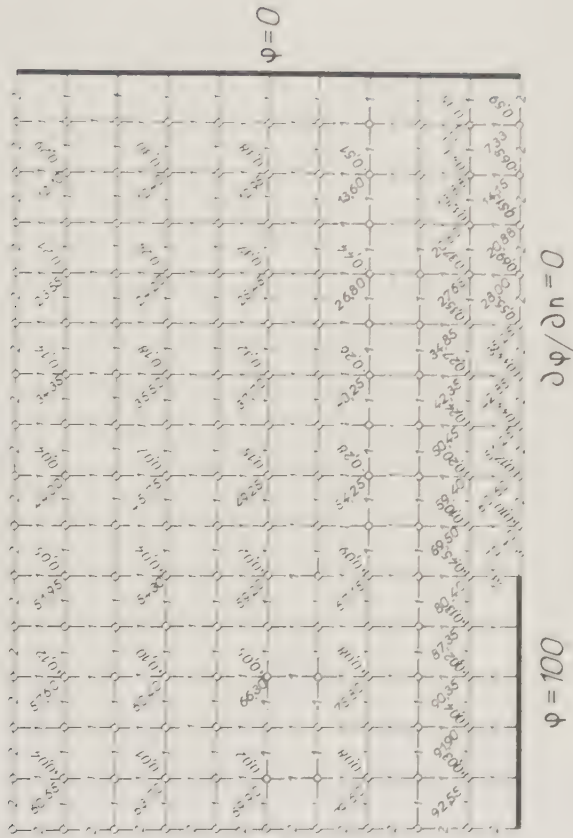
PLANCHE II₆

Valeur théorique



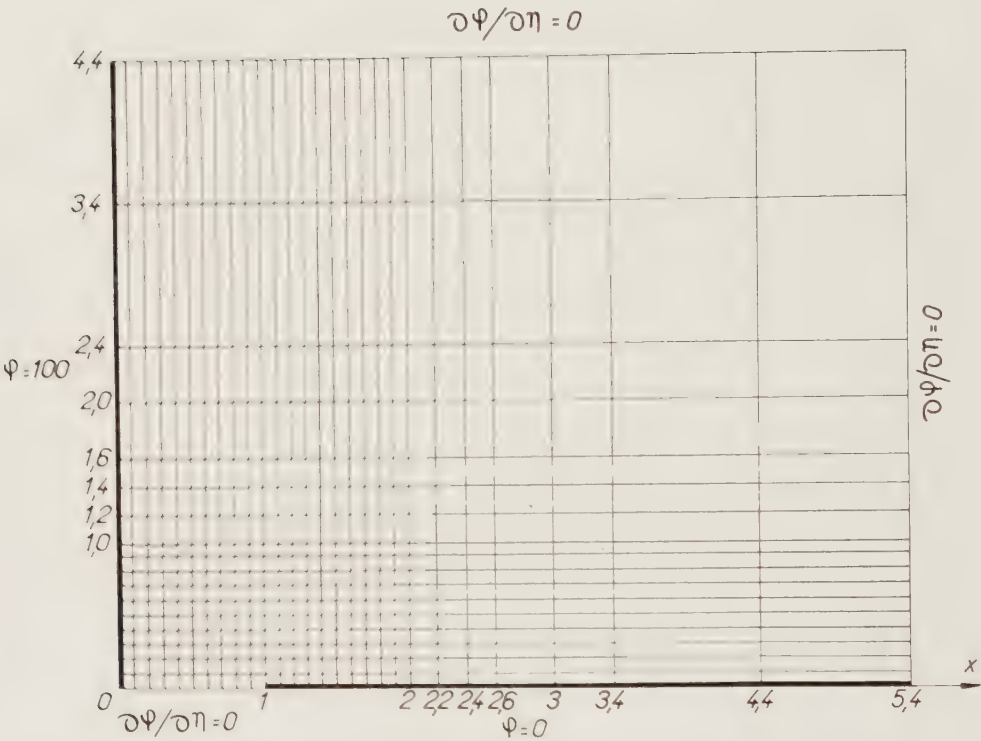
Valeur de la résistance

$\partial \phi / \partial n = 0$



Représentation d'un point singulier au voisinage d'une coupure
Comparaison des résultats expérimentaux du réseau à ceux de la cage

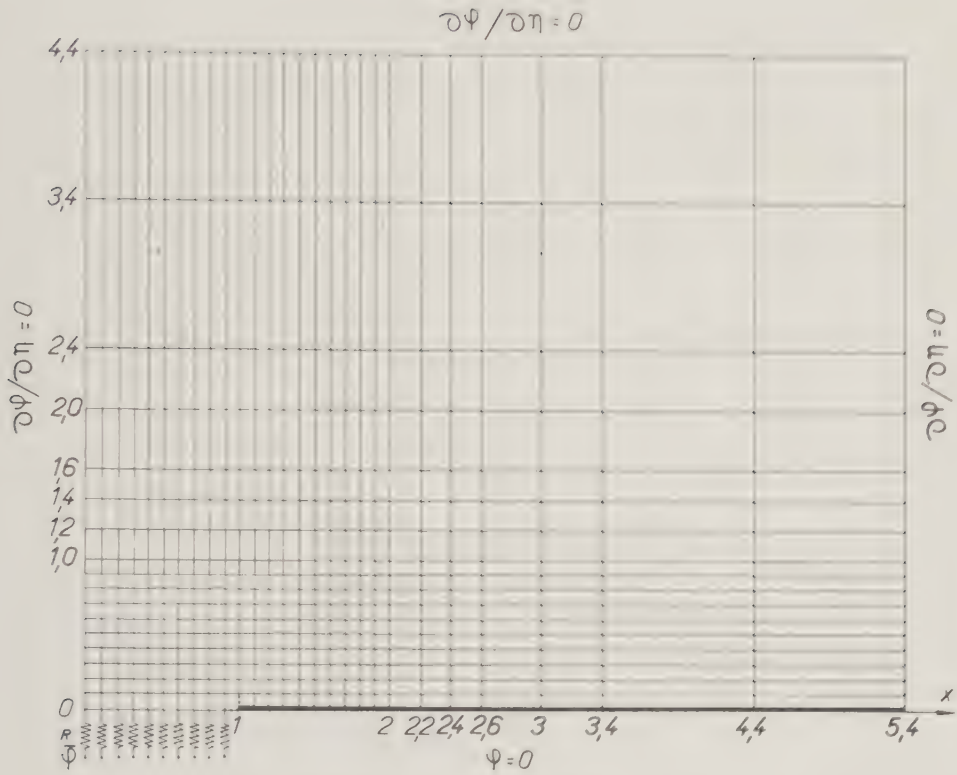
PLANCHE II₇



Représentation d'un point singulier au réseau (extrémité d'une coupure en milieu infini)
Comparaison des résultats expérimentaux du réseau aux valeurs théoriques

x	φ théorique	ÉCART	ÉCART
		EXPÉRIMENTAL avec modification	EXPÉRIMENTAL sans modification
0	100	0	0
0,1	93,58	0,0	- 0,22
0,2	87,15	- 0,04	- 0,48
0,3	80,596	0,10	- 0,80
0,4	73,78	- 0,12	- 1,07
0,5	66,65	- 0,15	- 1,41
0,6	59,08	0,30	- 1,95
0,7	50,67	0,35	- 2,53
0,8	40,93	0,40	- 3,11
0,9	28,65	- 0,50	- 5,23
1	0	0	0

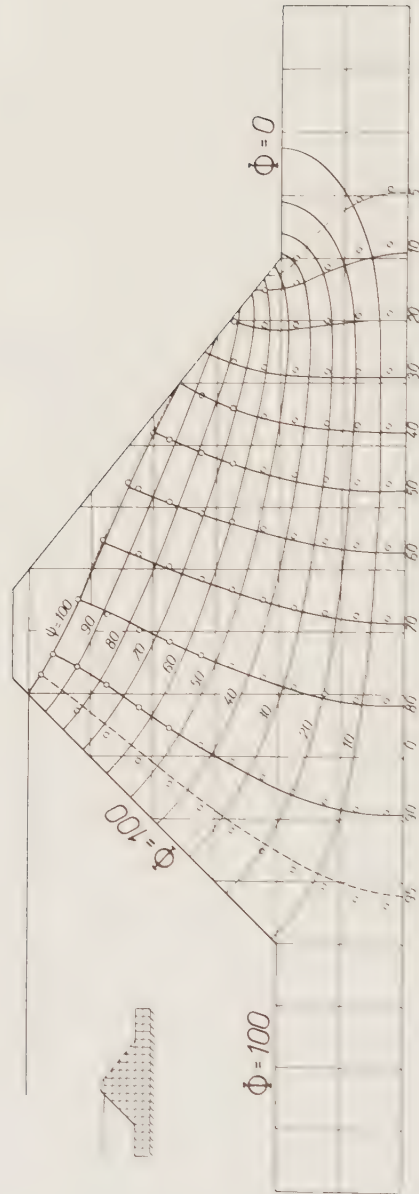
PLANCHE II_M



Représentation d'un point singulier au réseau
taille elliptique dans la théorie de PRANDTL, avec condition de FOURIER)

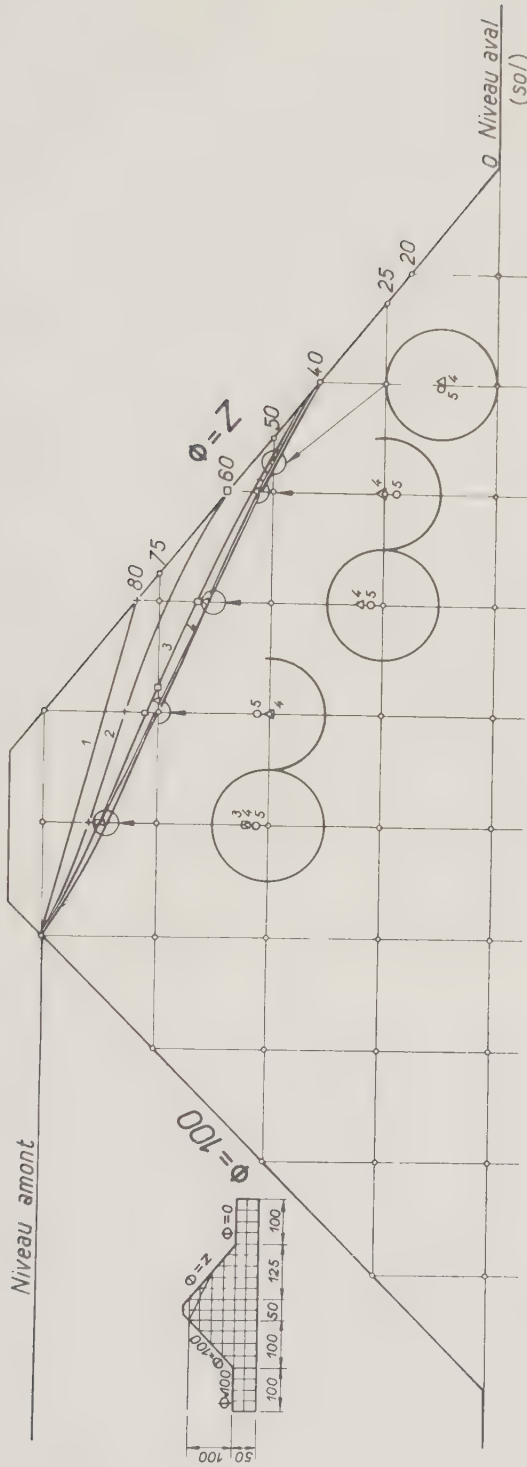
x	R_m	φ	φ théorique	ÉCART EXPÉRIMENTAL avec modification	ÉCART EXPÉRIMENTAL sans modification
0	5 000	100	80,00	- 0,22	+ 0,02
0,1	2 487,5	99,50	79,60	+ 0,25	- 0,04
0,2	2 449,5	97,98	78,38	+ 0,34	- 0,02
0,3	2 385	95,39	76,31	+ 0,22	- 0,03
0,4	2 291	91,65	73,32	+ 0,20	- 0,09
0,5	2 165	86,60	69,28	+ 0,14	- 0,16
0,6	2 000	80,00	64,00	- 0,09	- 0,36
0,7	1 785	71,41	57,13	+ 0,04	- 0,61
0,8	1 500	60,00	48,00	- 0,14	- 1,32
0,9	1 090	43,59	34,87	- 0,47	- 3,36
1			0	0	0

PLANCHE II₉



Equipotentielles et lignes de courant dans un barrage perméable
Comparaison des résultats du réseau (—) à ceux de la cuve (---)

PLANCHE II₁₀

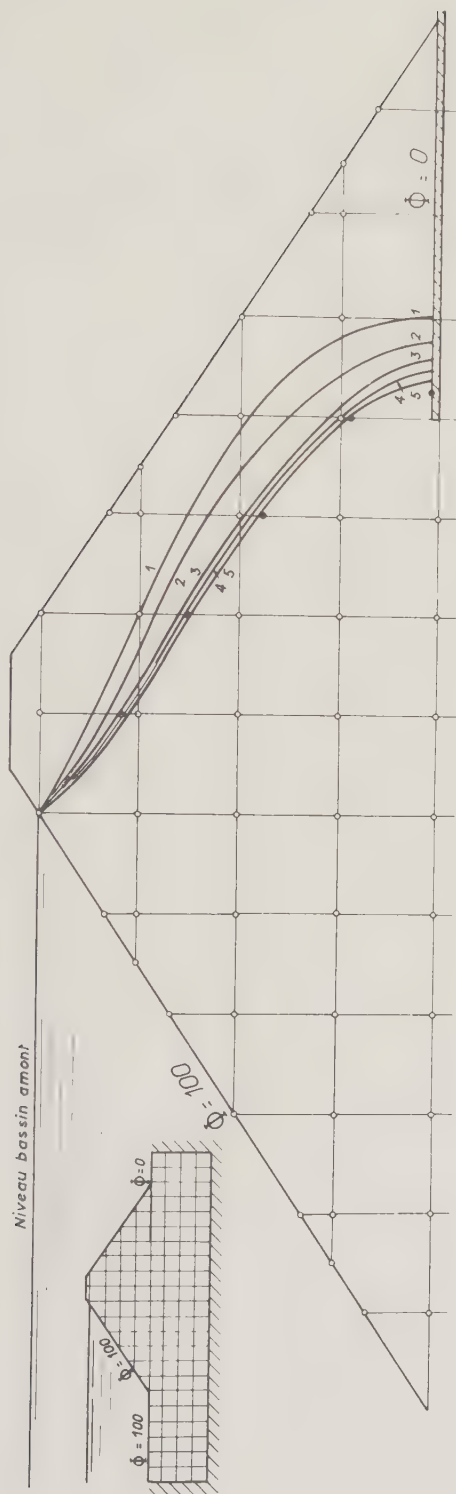


Détermination de la surface libre par approximations successives

Emploi de conductances de bordure, Cas avec surface de suintement

- + : points $\varphi = 3$ trouvés à partir de l'approximation n° 1; $\triangle$: points $\varphi = 3$ trouvés à partir de l'approximation n° 3;
 $\square$: points $\varphi = 3$ trouvés à partir de l'approximation n° 2; $\circ$: points $\varphi = 3$ trouvés à partir de l'approximation n° 4.

PLANCHE II₁₃



Détermination de la surface libre par approximations successives
 Méthode par injections (injections déterminées à l'aide d'abaques). Cas sans surface de suintement
 : résultats obtenus à la cuve

PLANCHE II₁₃

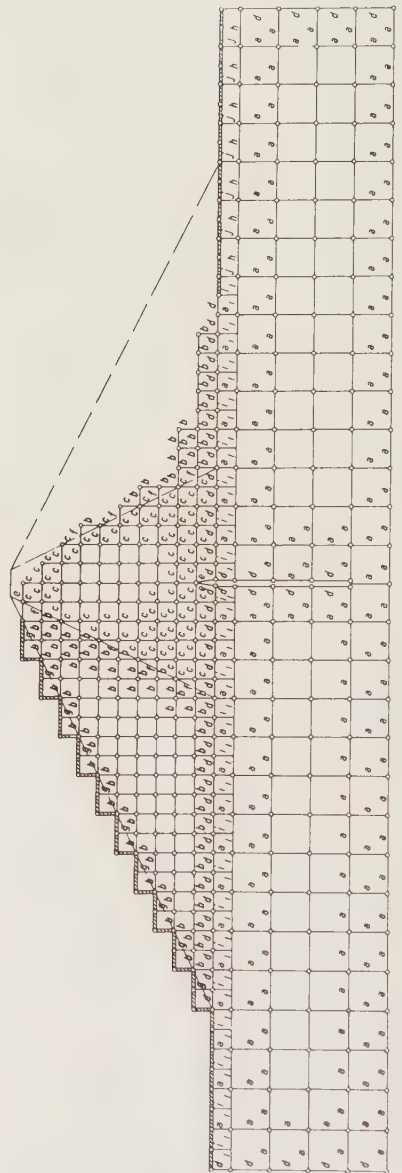
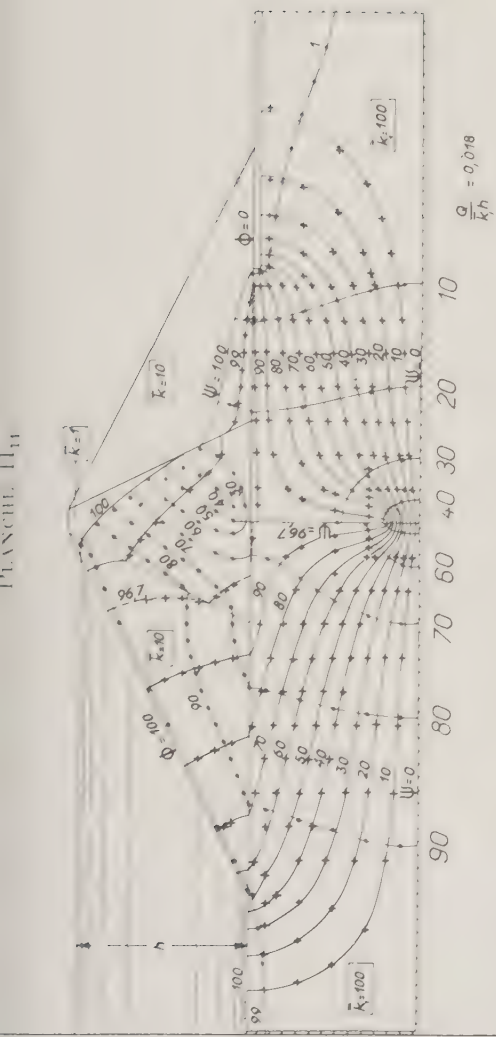


Schéma d'un réseau représentant un mûssif zoné. (Cf. planche II₁₄)

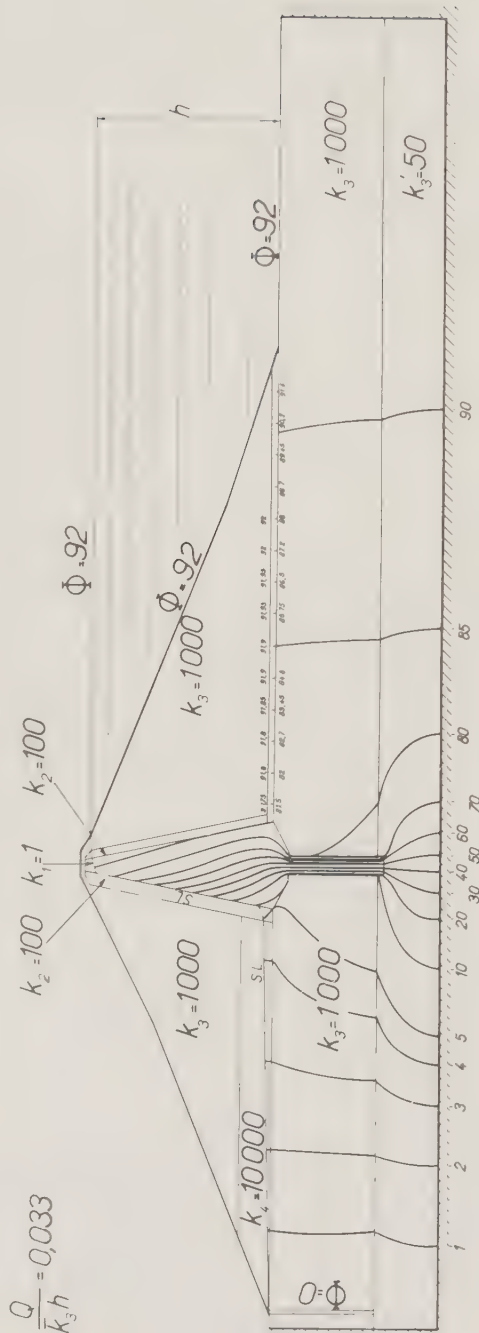
$a = 10 \Omega$; $b = 100 \Omega$; $c = 1\,000 \Omega$; $d = 20 \Omega$; $e = 2\,000 \Omega$; $f = 550 \Omega$;
 $g = 50 \Omega$; $h = 4/3 a$; $i = 2/3 a$; $j = 1/4 a$



$$\frac{Q}{K_3 h} = 0,018$$

Equipotentielle et lignes de courant dans un massif zoné. Résultats obtenus avec le réseau de la planche II₁₃

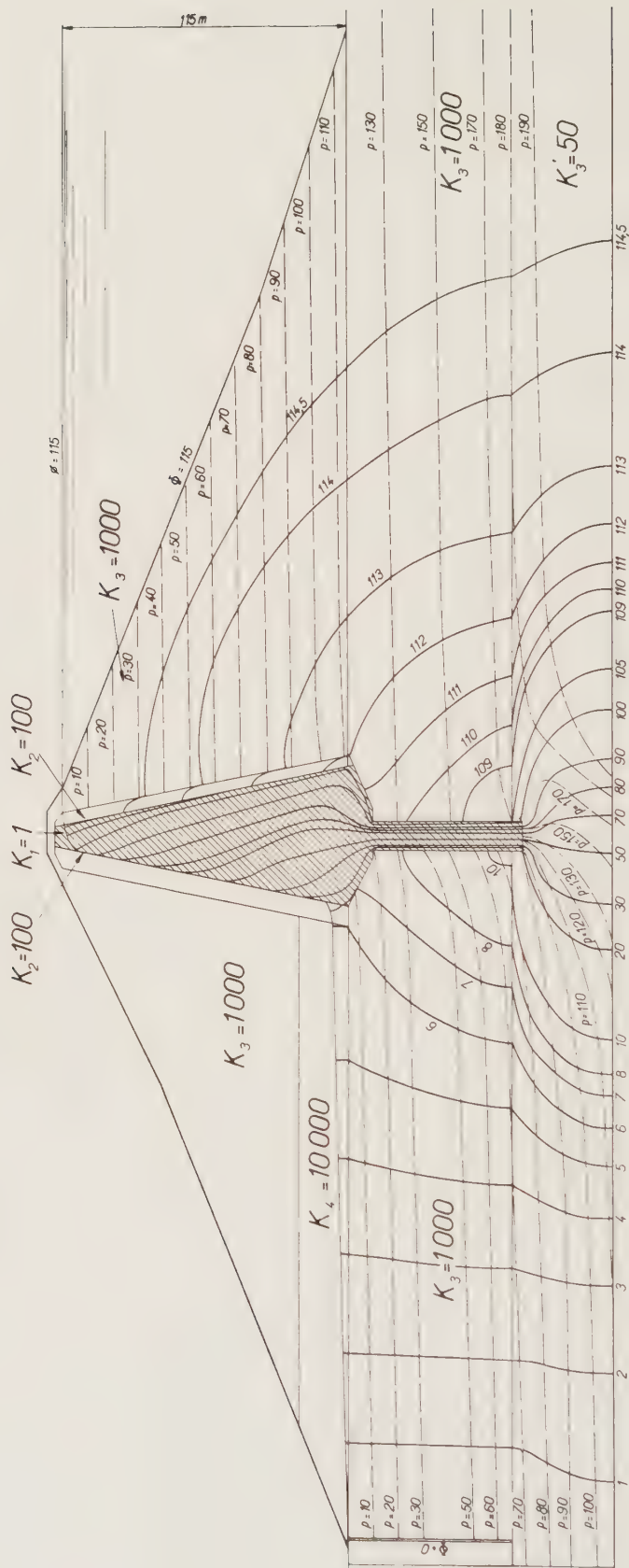
PLANCHE II₁₅



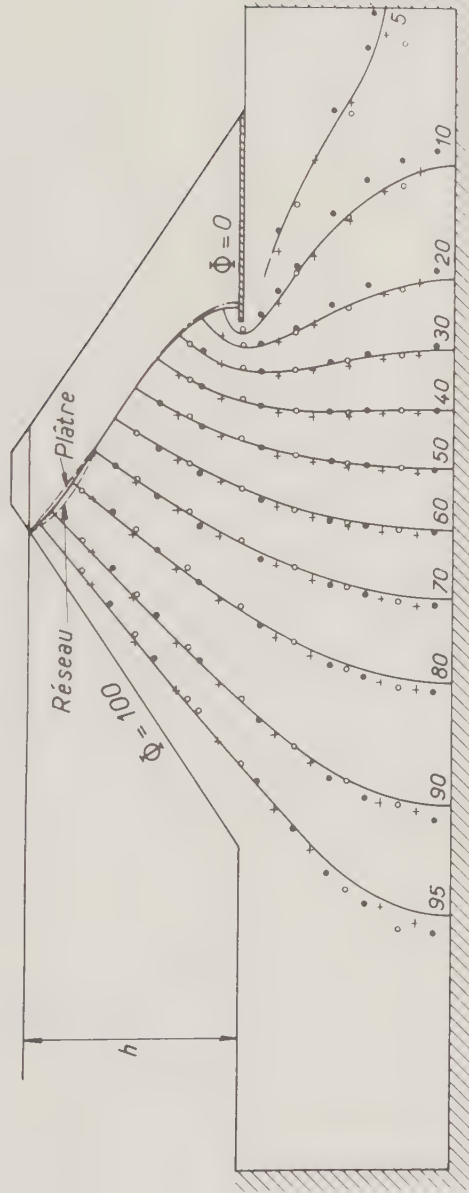
$$\frac{Q}{K_3 h} = 0,033$$

Equipotentielle dans un massif zoné

PLANCHE II₁₆



Équipotentielles et équipressions dans un massif zoné

PLANCHE III₁

Comparison des résultats obtenus à la cuve (—) avec le papier conducteur (○), le réseau (○), et le plâtre (●)

$$\frac{Q}{kh} = 0,70 \text{ (réseau); } \frac{Q}{kh} = 0,70 \text{ (papier); } \frac{Q}{kh} = 0,72 \text{ (cuve)}$$

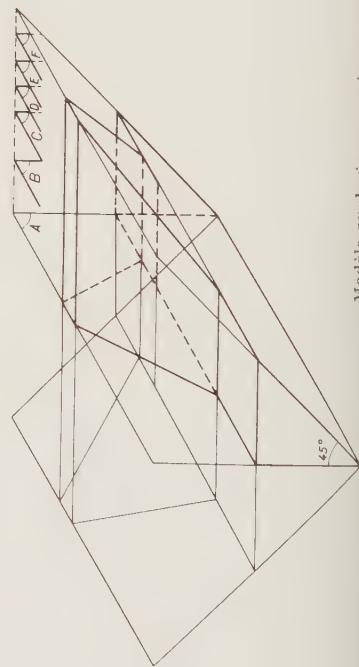
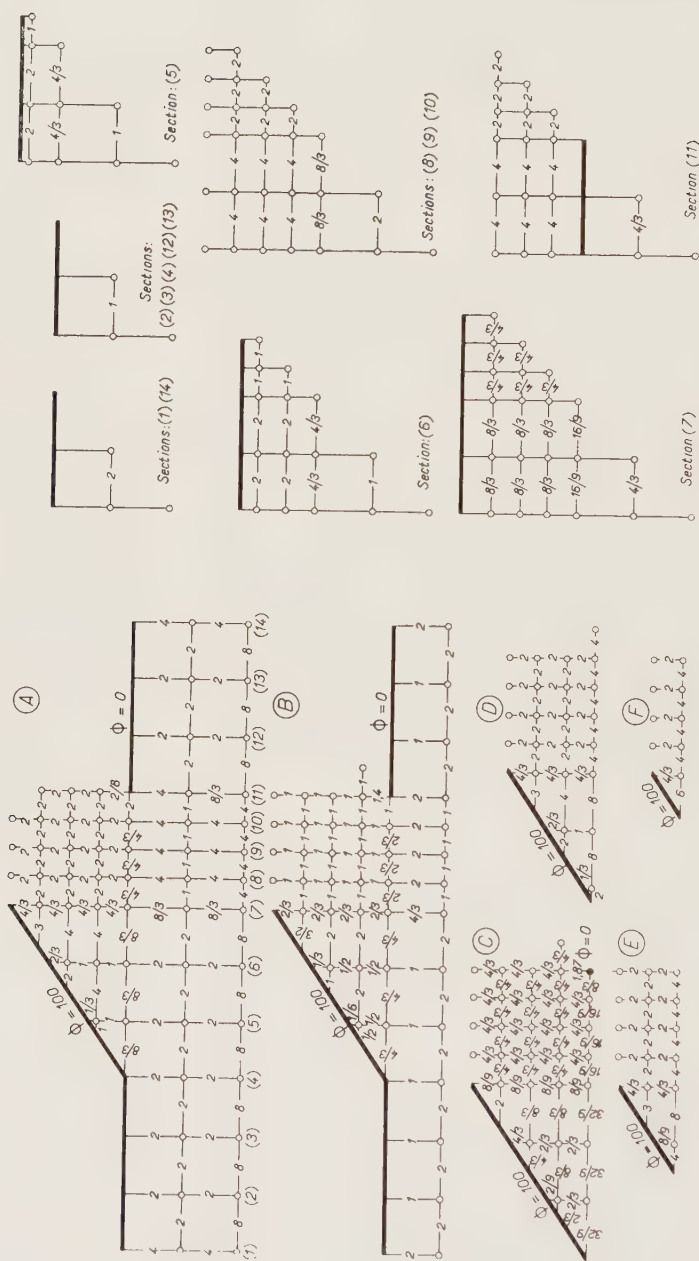


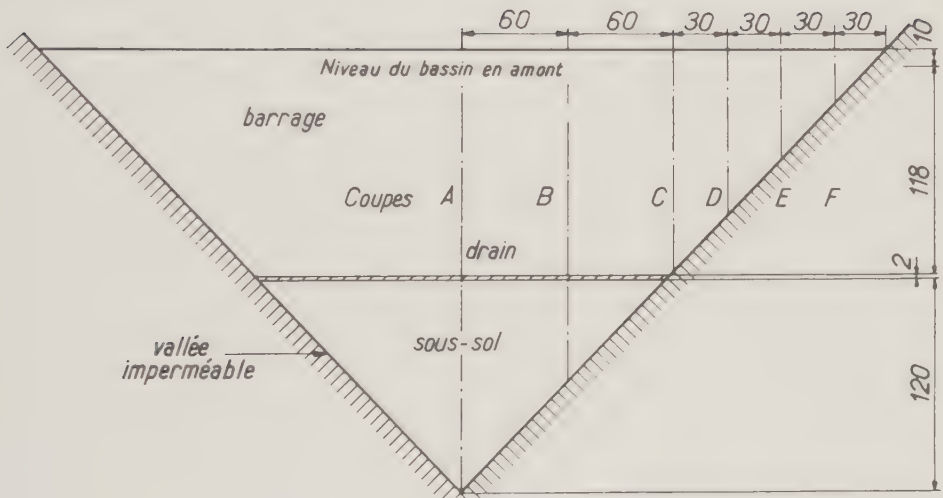
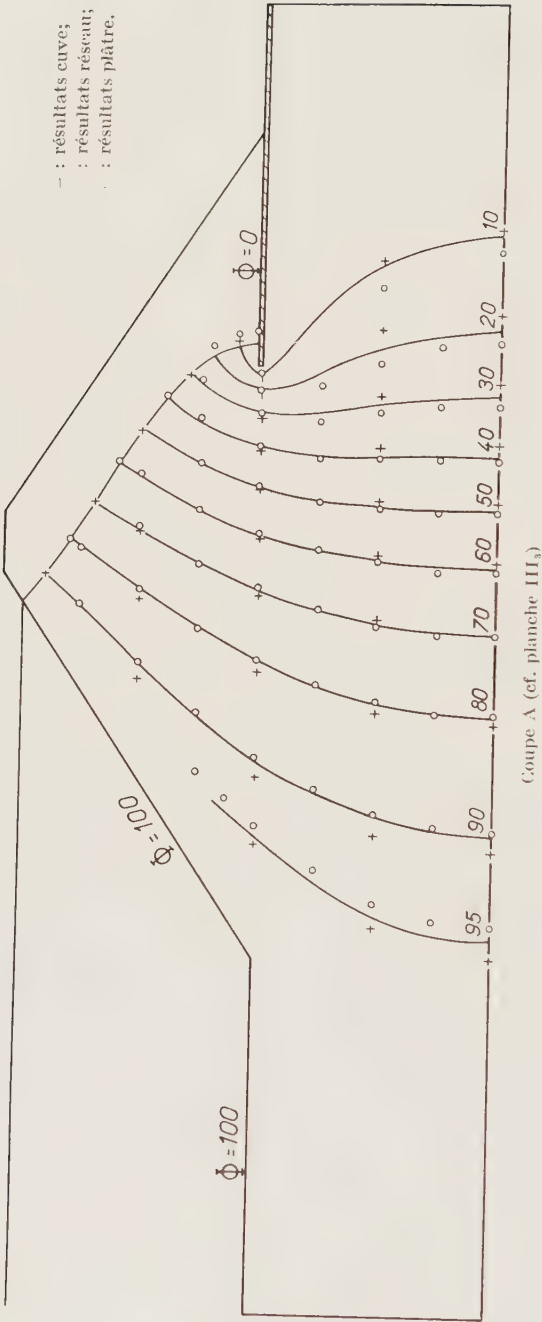
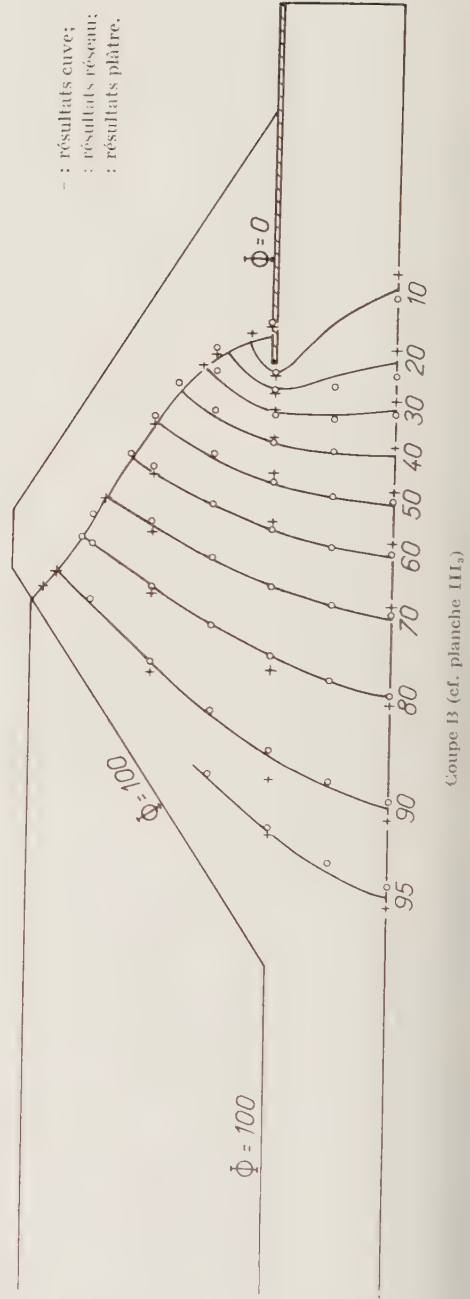
PLANCHE III₃Coupe transversale du barrage à trois dimensions (cf. planche III₂)

PLANCHE III₄



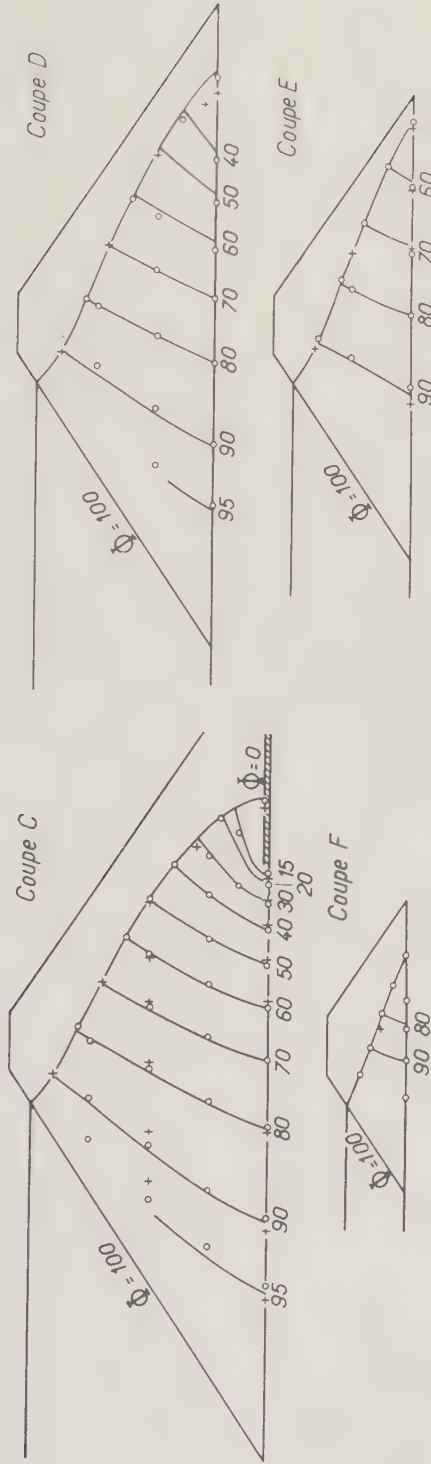
Coupe A (cf. planche III₃)

PLANCHE III₅

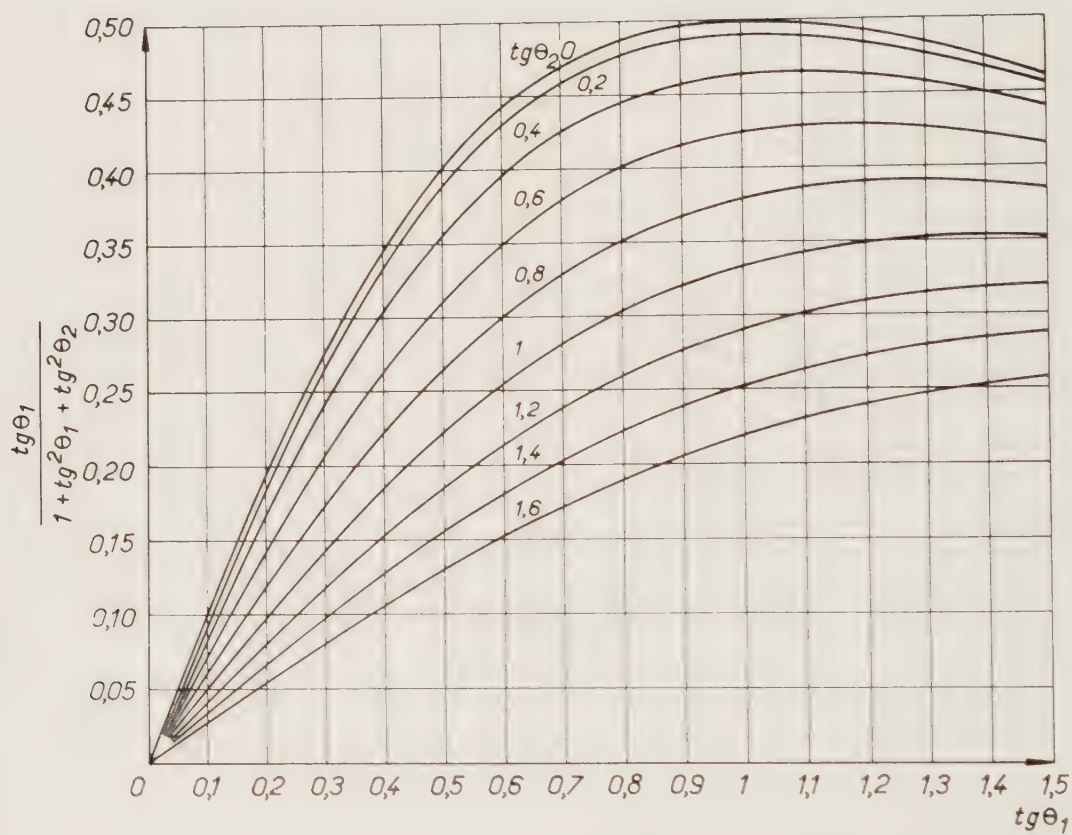


Coupe B (cf. planche III₃)

PLANCHE III_g

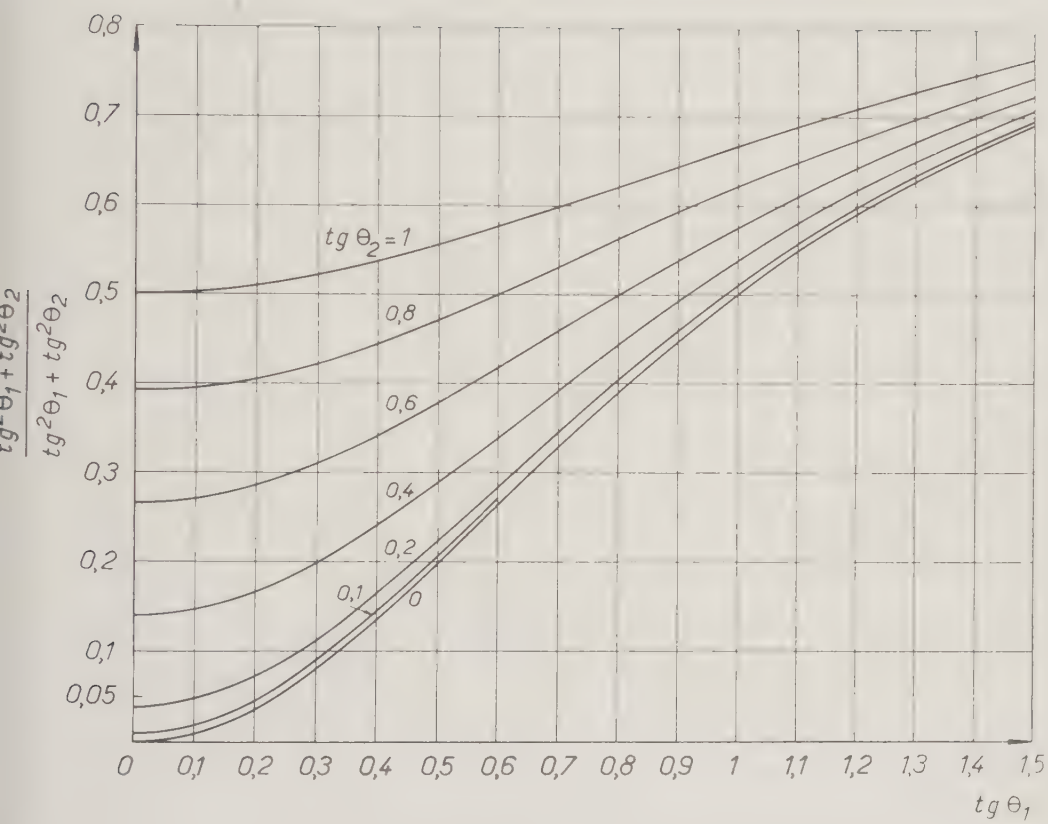


(Cf. planche III_g)

PLANCHE III₇

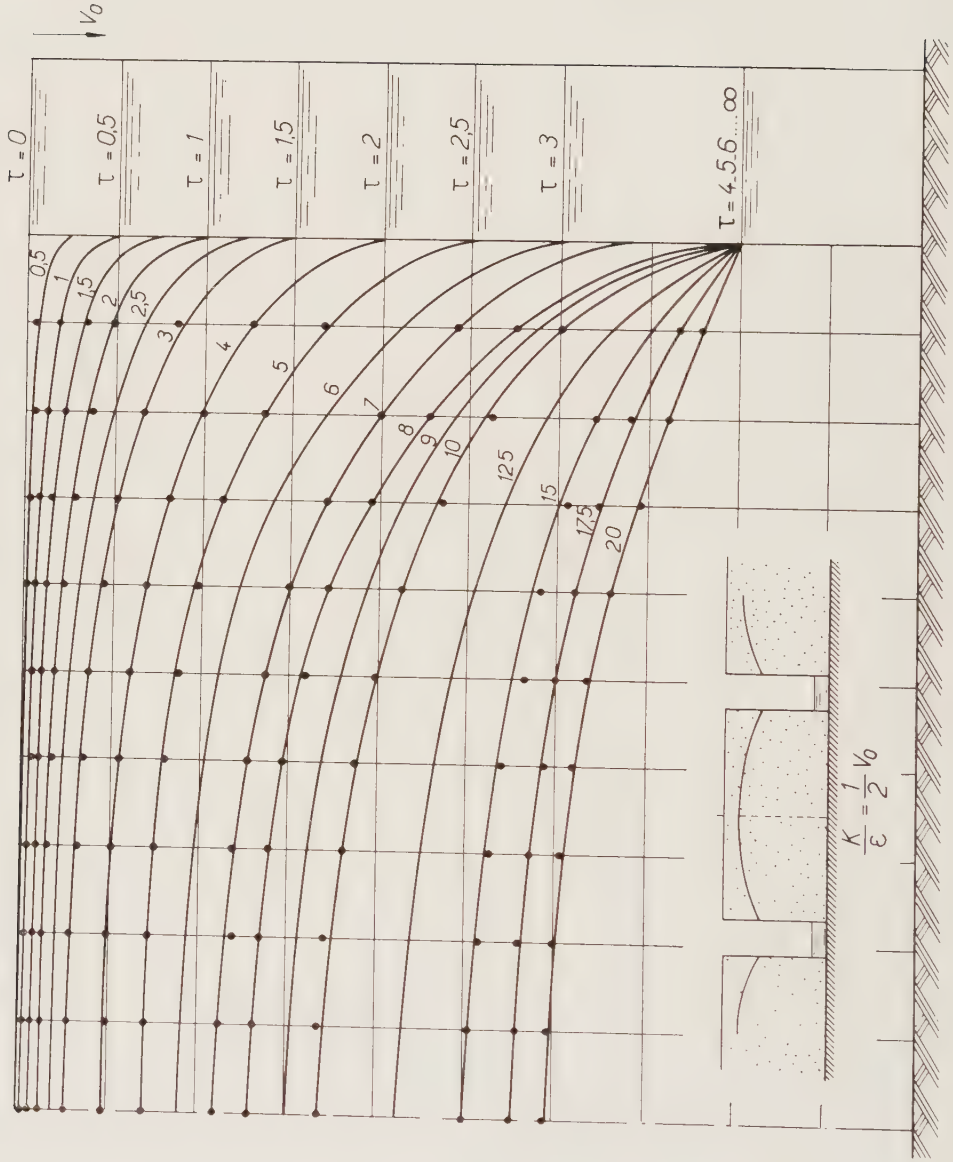
Valeurs de φ'_x ou de φ'_y sur une surface libre en milieu homogène et isotrope

PLANCHE III₈



Valeurs de $\varphi'z$ sur une surface libre en milieu homogène et isotrope

PLANCHE IV₁

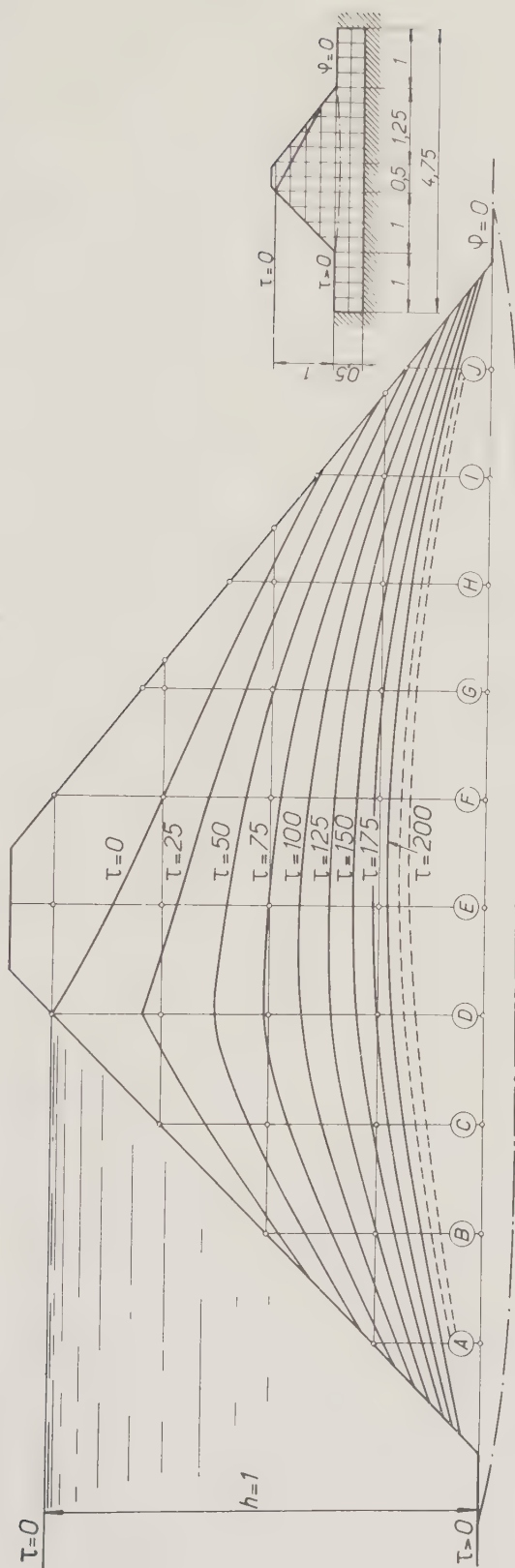


Drainage d'un massif rectangulaire. Réaction de la surface libre à l'abaissement du niveau dans les tranchées

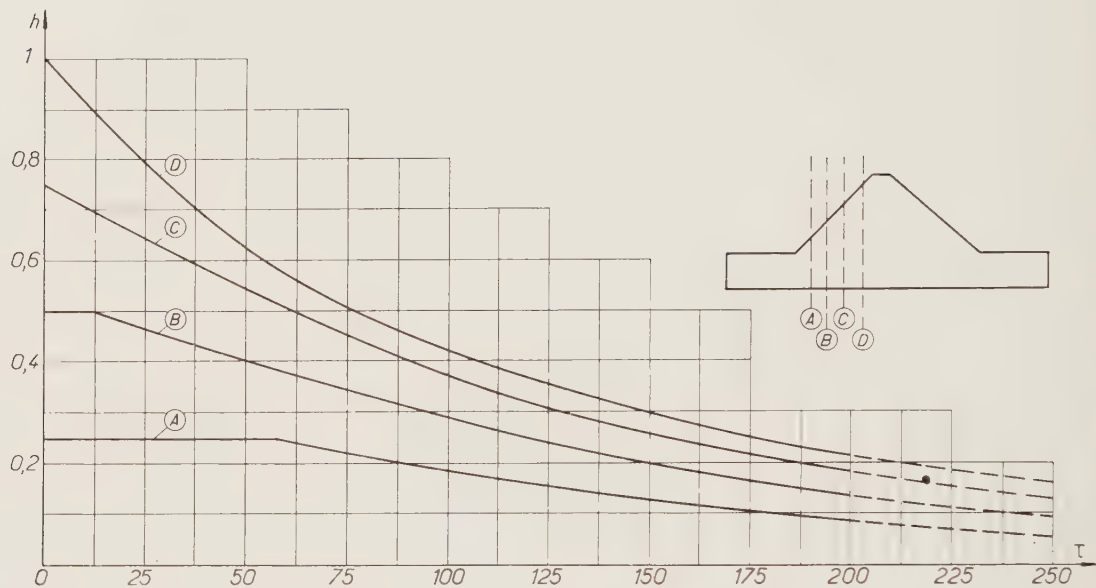
PLANCHE IV₂

Drainage d'un massif rectangulaire. Variation de la cote de la surface libre en fonction du temps pour différentes sections verticales.

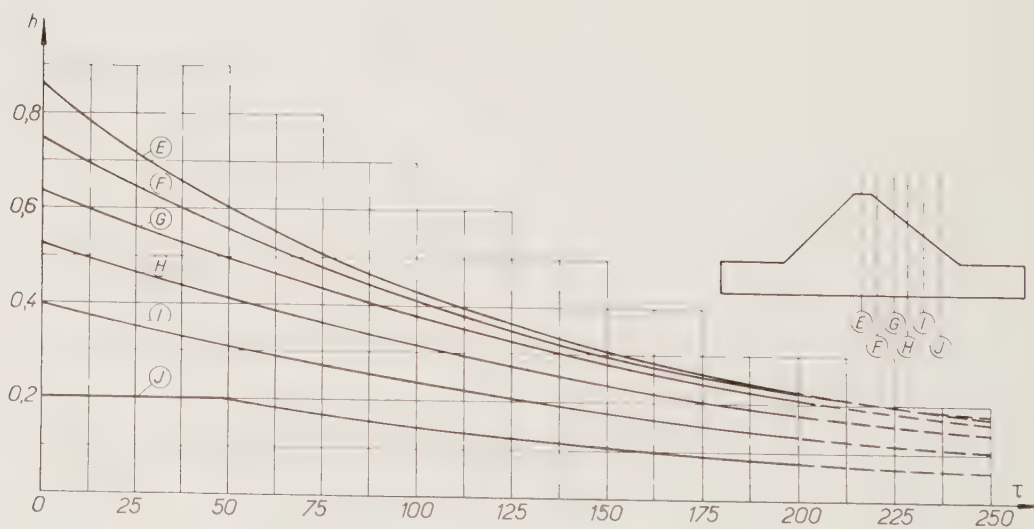
PLANCHE IV₄



Vidange instantanée de la retenue d'un barrage. Différentes positions de la surface libre en fonction du temps

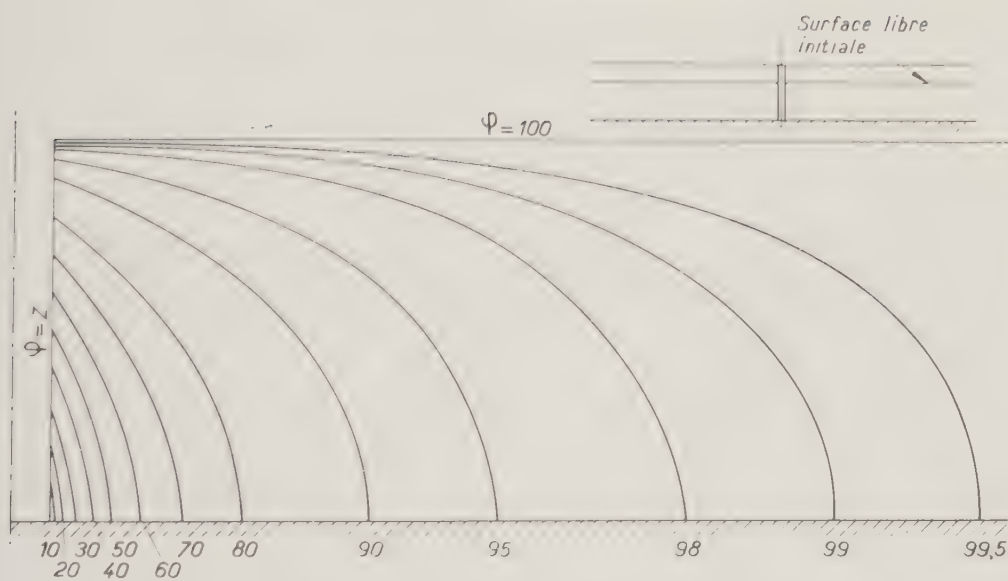
PLANCHE IV₅ a

Vidange instantanée de la retenue d'un barrage
Variation de la cote de la surface libre en fonction du temps pour différentes sections verticales (cf. planche IV₄)

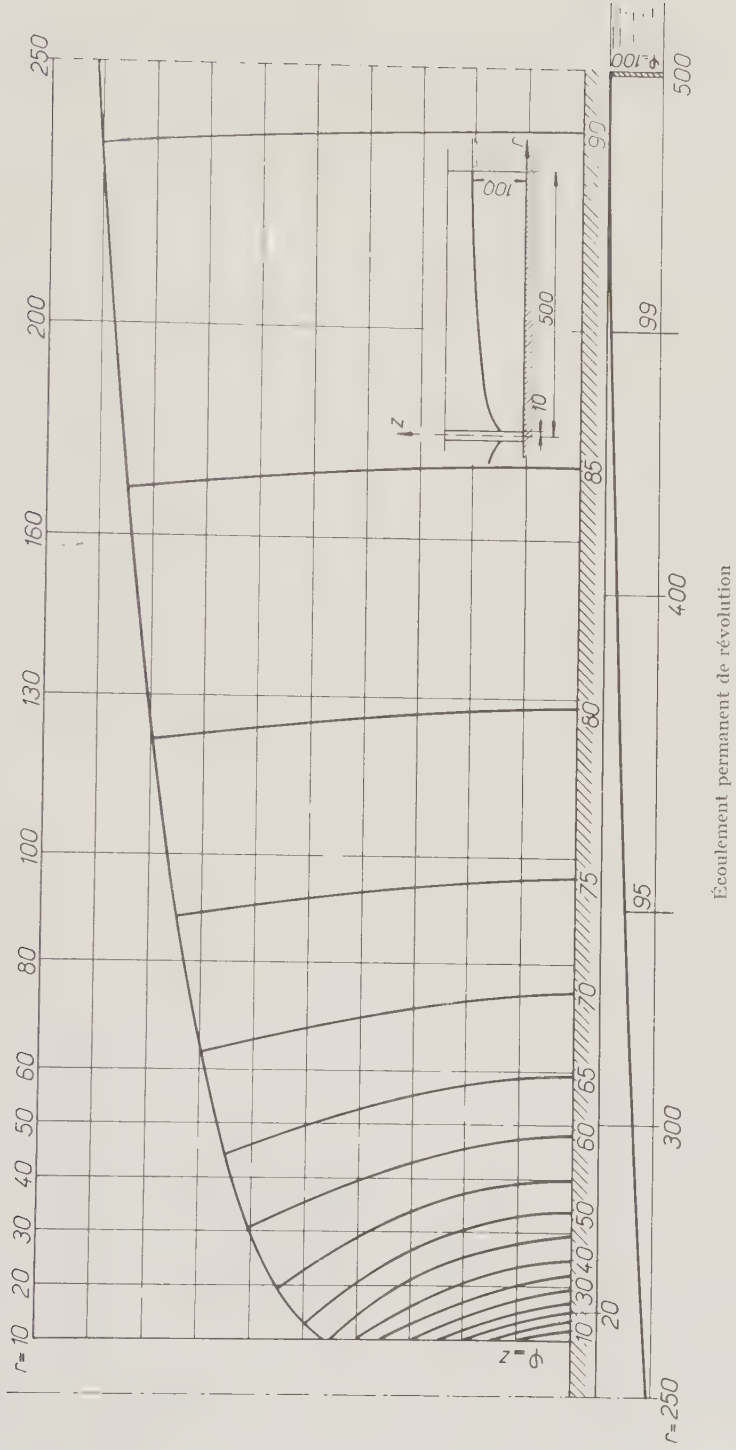
PLANCHE IV₅ b

Vidange instantanée de la retenue d'un barrage
Variation de la cote de la surface libre en fonction du temps pour différentes sections verticales (cf. planche IV₄)

PLANCHE IV₆



Répartition du potentiel autour d'un puits à l'instant initial (nappe d'étendue infinie)

PLANCHE IV₈

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE PREMIER

- [1] A. CASAGRANDE. — *Seepage through dams*. New England Water Works Association, vol. L1, n° 2 (juin 1937), pp. 131-172.
- [2] M. MUŞKAT. — J. W. Edwards Inc., Ann Arbor, Michigan (1946).
- [3] L. HUGUES. — *Étude théorique et expérimentale sur les propriétés hydrodynamiques d'un sol pulvérulent et les lois de la filtration*. Annales du Génie Rural, fasc. 70 (1948).
- [4] POLOUBARINOVA-KOTCHINA. — *Théorie du mouvement des eaux souterraines*. Moscou (1952).
- [5] L. MALAVARD. — *La technique des analogies électriques*. Techniques générales du laboratoire de Physique, vol. II, Éd. C.N.R.S.
- [6] Mladen M. BORELI. — Thèse, Grenoble (1954).
- [7] R. D. WYCKOFF et D. W. REED. — *Physics*, 6, 395 (1935).
- [8] L. MALAVARD. — *Sur une nouvelle technique dans le calcul expérimental par analogies rhéoelectriques*. La Recherche Aéronautique (mars-avril 1951).
- [9] E. D'OLIVEIRA E SOUSA. — 1° *Détermination de la ligne de saturation dans les digues en terre par la méthode de l'analogie électrique*. IV^e Congrès International de Génie Rural, Rome (avril-mai 1951), pp. 177-186 — 2° *L'assainissement des terres au moyen de tuyaux de drainage*. Thèse, Lisbonne (1951).
- [10] P. HUARD DE LA MARRE. — 1° *Étude rhéoelectrique de problèmes d'infiltration*. C.R. Acad. Sc., t. 235, pp. 602-603 (1952) — 2° *Nouvelles méthodes pour le calcul expérimental des écoulements dans les massifs poreux*. La Houille Blanche, n° A, pp. 87-101 (1953).
- [11] P. F. FILTCHAKOF. — *Représentation analogique par papier conducteur des problèmes de filtration*. C.R. Acad. Sc. U.R.S.S., t. LXXXIV, n° 2, pp. 237-240 (11 mai 1952).
- [12] L. MALAVARD. — *Application des analogies électriques à la solution de quelques problèmes de l'Hydrodynamique*. Publ. Sc. et Techn. Minist. Air, fasc. 57 (1934).

CHAPITRE II

- [1] R. V. SOUTHWELL. — *Relaxation methods in theoretical Physics*, Oxford (1946).
D. N. DE G. ALLEN. — *Relaxation methods*, McGraw-Hill, Londres (1951).
- [2] D. C. DE PACKH. — *A resistor network for the approximate solution of the LAPLACE equation*. Rev. Scient. Instr., vol. 18, p. 798 (1947).
- [3] S. C. REDSHAW. — *An electrical potential analyser*. Inst. Mech. Eng. Proc., vol. 159 (1948).
- [4] L. TASNY-TSCHIASSNY. — *The triangulation of a two-dimensional continuum for the purpose of the approximate solution of the second order partial differential equations*. J. Appl. Phys., vol. 20, n° 5 (mai 1949).
- [5] G. LIEBMANN. — *Solution of partial differential equations with a resistance network analogue*. Brit. J. Appl. Phys., 1, p. 92 (1950).

- [6] E. PERSICO. — *A new resistor network for the integration of LAPLACE's equation* (trad. anglaise). Il Nuovo Cimento, vol. IX, n° 1 (1^{er} janv. 1952).
- [7] P. HUARD DE LA MARRE. — *Nouvelles méthodes pour le calcul expérimental des écoulements dans les massifs poreux*. La Houille Blanche, numéro spécial A (1953).
- [8] G. LIEBMANN. — *Resistance network analogues with unequal meshes or subdivided meshes*. Brit. J. Appl. Phys., vol. 5, pp. 362-366 (oct. 1954).
- [9] P. HUARD DE LA MARRE. — *Sur l'imposition des conditions aux limites dans les réseaux de conductances*. Rapport intérieur (juil. 1954). Publié aux Journées Internationales de Calcul Analogique, Bruxelles (sept. 1955).

CHAPITRE III

- [1] P. HUARD DE LA MARRE. — *Expressions exactes des débits d'infiltration dans des barrages tridimensionnels à parois verticales*. C.R. Acad. Sc., t. 242, p. 1127 (fév. 1956).
- [2] P. HUARD DE LA MARRE. — *Modèles analogiques électriques à trois dimensions pour l'étude des écoulements de filtration à surface libre*. La Houille Blanche, n° A (1956).

CHAPITRE IV

- [1] J. BOUSSINESQ. — *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le régime des sources*. J. Math. pures et appl., t. X (1904), pp. 5-78 et 363-994.
- [2] C. V. THEIS. — *The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground-water storage*. Trans. Amer. Geophysical Union (août 1935), pp. 519, 524.
- [3] POLOUBARINOVA-KOTCHINA. — *Sur le mouvement non permanent de l'eau souterraine à partir des réservoirs*. Prikladnaia Matematika i Mekhanika (mars-avril 1949), pp. 187-206.
- [4] L. HUGUES et J. HABIB. — *Sur les nappes de drainage en régime variable*. Revue Générale de l'Hydraulique (janv.-fév. 1950), pp. 24-34.
- [5] P. BAUMANN. — *Ground-water movement controlled through spreading*. Proc. Americ. Soc. Civil Eng. (août 1951), vol. 77, separate N. 86.
- [6] A. CASAGRANDE et W. L. SHANNON. — *Base course drainage for airport pavements*. Trans. Amer. Soc. Civil. Eng., 7 (1952), pp. 792-820.
- [7] E. C. CHILDS. — *The water table, equipotentials and streamlines in drained land. V : The moving water table*. Soil Sci., 63 (1947), pp. 361-376.
- [8] E. C. CHILDS et T. O'DONNELL. — *The water table, equipotentials and streamlines in drained land. VI : The rising water table*. Soil Sci., 71 (1951), pp. 233-237.
- [9] G. SCHNEEBELI et P. HUARD DE LA MARRE. — *Nouvelles méthodes de calcul pratique des écoulements de filtration non permanents à surface libre*. La Houille Blanche, n° B (1957), pp. 170-185.
- [10] T. W. LAMBE. — *Capillary phenomena in cohesionless soils*. Proc. A.S.C.E., 76, n° 4 (fév. 1950).
- [11] J. MIROUX et G. MARTIN. — *Un amplificateur opérationnel destiné à l'analyseur à réseau pour calculs analogiques*. Note technique intérieure O.N.E.R.A. (non publiée) (avril 1954).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS
DANS LA MÉTHODE DE JONES
POUR L'ÉTUDE DES AILES EN TRANSSONIQUE

Vu et approuvé :

Paris, le 6 Juin 1956.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.



IMPRIMERIE

